

Ettore Majorana Scientific Papers



Società Italiana di Fisica



English translation of the original Italian texts by *P. Radicati di Brozolo* (papers no. 1a, 2, 3, 4, 5, 6, Preliminary notes for the inaugural lecture), *N. Robotti* and *F. Guerra* (paper no. 1b), *C. A. Orzalesi* (paper no. 7), *L. Maiani* (paper no. 9) and *R. N. Mantegna* (paper no. 10). English translation from the original German text by *V. Wehrli-Brink* (paper no. 8a)

H. Winter is gratefully acknowledged for carefully reading the proofs and for translating into German the notes of the Editor of paper no. 8a

Original versions and English translations with revisions by the Editors

Cover design: Muon Neutrino from the project "*Perception of the Extreme Unseen - Visual Representation of Subatomic Particle Energy and Matter*". A collaboration between design and physics at the University of Michigan 2002-05 by Drs. G. Kane, D. Gerdes and Industrial Designer J. H. Andersen. (Courtesy of J. H. Andersen)

Graphic elaborated by S. Oleandri

The portraits and photographs of Ettore Majorana are published by kind permission of the Majorana family, E. Recami and B. Piqué. (Reproduction is not permitted)

Produced by the Editorial Staff of the Italian Physical Society, Bologna, Italy, under the supervision of A. Oleandri

Printing and binding: Monograf, s.r.l., Via Collamarini 5/e, Bologna, Italy

Printed on acid-free paper

ETTORE MAJORANA
Scientific Papers

On occasion of the centenary of his birth

edited by
G. F. Bassani
and the Council of the Italian Physical Society

Giuseppe Franco Bassani
Scuola Normale Superiore
P.zza dei Cavalieri, 7
I-56126 Pisa, Italy

ISBN 88-7438-031-3

ISBN-13 978-3-540-48091-4

ISBN-10 3-540-48091-9

Library of Congress Control Number:

SIF Bologna Italy

Springer Berlin Heidelberg New York

Springer Berlin Heidelberg New York

2006936896

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilm or in any other way, and storage in data banks. Permission of duplication of this publication or parts thereof must always be obtained from the publishers.

Jointly published by:

Società Italiana di Fisica, Bologna
<http://www.sif.it>

and

Springer Berlin Heidelberg New York
Springer is part of Springer Science+Business Media
springer.com

© SIF, Bologna - Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

Printed in Italy

The use of designations, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.



INDICE - CONTENTS

Prefazione	p.	XI
Preface	»	XIII
Note biografiche	»	XV
Brief biography	»	XXXI

NOTA SCIENTIFICA n. 1a – SCIENTIFIC PAPER no. 1a
“Rendiconti dell’Accademia dei Lincei”, vol. 8, 1928, pp. 229-233

Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell’elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio –

G. GENTILE e E. MAJORANA	»	3
Commento alla Nota Scientifica n. 1a – E. ARIMONDO	»	8
On the splitting of the Roentgen and optical terms caused by the electron rotation and on the intensity of the cesium lines –		
G. GENTILE and E. MAJORANA	»	11
Comment on the Scientific Paper no. 1a – E. ARIMONDO	»	16

NOTA SCIENTIFICA n. 1b – SCIENTIFIC PAPER no. 1b
Comunicazione alla 22a Adunanza Generale della Società Italiana di Fisica
Talk given at the 22nd General Meeting of the Italian Physical Society
“Il Nuovo Cimento”, vol. 6, 1929, pp. XIV-XVI.

Majorana dr. Ettore: Ricerca di un’espressione generale delle correzioni di Rydberg, valevole per atomi neutri o ionizzati positivamente	»	21
Commento alla Nota Scientifica n. 1b – F. GUERRA e N. ROBOTTI	»	24
Majorana dr. Ettore: Search for a general expression of Rydberg corrections, valid for neutral atoms or positive ions	»	29
Comment on the Scientific Paper no. 1b – F. GUERRA and N. ROBOTTI	»	32

NOTA SCIENTIFICA n. 2 – SCIENTIFIC PAPER no. 2

“Il Nuovo Cimento”, vol. 8, 1931, pp. 22-28.

Sulla formazione dello ione molecolare di elio – E. MAJORANA	»	39
Commento alla Nota Scientifica n. 2 – A. SASSO	»	46
On the formation of molecular helium ion – E. MAJORANA	»	48
Comment on the Scientific Paper no. 2 – A. SASSO	»	55

NOTA SCIENTIFICA n. 3 – SCIENTIFIC PAPER no. 3

“Il Nuovo Cimento”, vol. 8, 1931, pp. 78-83.

I presunti termini anomali dell’elio – E. MAJORANA	»	59
Commento alla Nota Scientifica n. 3 – M. INGUSCIO e F. MINARDI	»	64
On the possible anomalous terms of helium – E. MAJORANA	»	67
Comment on the Scientific Paper no. 3 – M. INGUSCIO and F. MINARDI	»	72

NOTA SCIENTIFICA n. 4 – SCIENTIFIC PAPER no. 4

“Rendiconti dell’Accademia dei Lincei”, vol. 13, 1931, pp. 58-61.

Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno – E. MAJORANA	»	77
Commento alla Nota Scientifica n. 4 – A. SASSO	»	81
Pseudopolar reaction of hydrogen atoms – E. MAJORANA	»	83
Comment on the Scientific Paper no. 4 – A. SASSO	»	87

NOTA SCIENTIFICA n. 5 – SCIENTIFIC PAPER no. 5

“Il Nuovo Cimento”, vol. 8, 1931, pp. 107-113.

Teoria dei tripletti P' incompleti – E. MAJORANA	»	91
Commento alla Nota Scientifica n. 5 – E. ARIMONDO	»	97
Theory of the incomplete P' triplets – E. MAJORANA	»	101
Comment on the Scientific Paper no. 5 – E. ARIMONDO	»	107

NOTA SCIENTIFICA n. 6 – SCIENTIFIC PAPER no. 6

“Il Nuovo Cimento”, vol. 9, 1932, pp. 43-50.

Atomi orientati in campo magnetico variabile – E. MAJORANA	»	113
Commento alla Nota Scientifica n. 6 – M. INGUSCIO	»	121
Oriented atoms in a variable magnetic field – E. MAJORANA	»	125
Comment on the Scientific Paper no. 6 – M. INGUSCIO	»	133

NOTA SCIENTIFICA n. 7 – SCIENTIFIC PAPER no. 7

“Il Nuovo Cimento”, vol. 9, 1932, pp. 335-344.

Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario –

E. MAJORANA	»	139
Commento alla Nota Scientifica n. 7 – N. CABIBBO	»	148
Relativistic theory of particles with arbitrary intrinsic angular momentum –		
E. MAJORANA	»	150
Comment on the Scientific Paper no. 7 – N. CABIBBO	»	160

NOTA SCIENTIFICA n. 8 – SCIENTIFIC PAPER no. 8

8a - “Zeitschrift für Physik”, Bd. 82, 1933, pp. 137-145.

8b - “La Ricerca Scientifica”, vol. 4 (1) 1933, pp. 559-563.

Über die Kerntheorie – E. MAJORANA	»	165
Sulla teoria dei nuclei – E. MAJORANA	»	174
Commento alla Nota Scientifica n. 8 – L. A. RADICATI DI BROZOLO	»	181
On nuclear theory – E. MAJORANA	»	186
Comment on the Scientific Paper no. 8 – L. A. RADICATI DI BROZOLO	»	194

NOTA SCIENTIFICA n. 9 – SCIENTIFIC PAPER no. 9

“Il Nuovo Cimento”, vol. 14, 1937, pp. 171-184.

Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone – E. MAJORANA	»	201
Commento alla Nota Scientifica n. 9 – L. MAIANI	»	215
A symmetric theory of electrons and positrons – E. MAJORANA	»	218
Comment on the Scientific Paper no. 9 – L. MAIANI	»	232

NOTA SCIENTIFICA n. 10 – SCIENTIFIC PAPER no. 10

“Scientia”, vol. 36, 1942, pp. 58-66.

Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali – E. MAJORANA	»	237
Commento alla Nota Scientifica n. 10 – R. N. MANTEGNA	»	247
The value of statistical laws in physics and social sciences – E. MAJORANA	»	250
Comment on the Scientific Paper no. 10 – R. N. MANTEGNA	»	259

LA LEZIONE INAUGURALE – THE INAUGURAL LECTURE

Università di Napoli, 13 gennaio 1938

University of Naples, 13 january 1938

Gli appunti per la lezione inaugurale – E. MAJORANA	»	263
Commento su “Gli appunti per la lezione inaugurale” – B. PREZIOSI e		
E. RECAMI	»	266
Preliminary notes of the inaugural lecture – E. MAJORANA	»	273
Comment on the “Preliminary notes of the inaugural lecture” – B. PREZIOSI		
and E. RECAMI	»	276

Prefazione

A un secolo dalla sua nascita Ettore Majorana suscita sentimenti profondi in chi ha studiato la sua opera scientifica e in chi si è avvicinato al suo modo di essere e ne ha apprezzato la sensibilità e l'umanità.

In questa occasione la Società Italiana di Fisica presenta un volume con tutti i suoi lavori nella lingua originale e —nella maggior parte dei casi per la prima volta— nella traduzione in inglese. Ogni lavoro è commentato da un esperto del settore specifico.

La ragione di tale impegno non comune è nella figura scientifica e umana di Ettore Majorana, che si colloca a buon diritto tra i grandi fisici della prima metà del ventesimo secolo. Enrico Fermi aveva di lui un'opinione altissima, tanto che è stata riferita una conversazione privata nella quale lo classificava tra i veri geni della scienza, come Galilei e Newton, quale forse avrebbe potuto essere se si fosse dedicato per lungo tempo alla fisica.

Le note scientifiche sono presentate in ordine cronologico rispettando le numerazioni attribuite da Edoardo Amaldi nel libro da lui curato “La vita e le opere di Ettore Majorana” pubblicato dall'Accademia Nazionale dei Lincei nel 1966.

Per non alterare l'ordine numerico (e cronologico) è stato attribuito il numero 1b alla comunicazione presentata da Ettore Majorana alla XII Adunanza Generale della Società Italiana di Fisica a Roma del dicembre 1928, quando era ancora studente. Il sunto di tale comunicazione, che riguarda il metodo di Thomas-Fermi, è pubblicato ne “Il Nuovo Cimento”, ma per motivi non noti era stato precedentemente ignorato ed escluso dalla lista delle pubblicazioni. È stato recentemente ritrovato ed analizzato da Francesco Guerra e Nadia Robotti che si sono occupati di commentarlo in questo volume.

A questa lista si è deciso di aggiungere anche uno dei molti manoscritti che sono conservati principalmente alla “Domus Galileiana” di Pisa e che sono stati già analizzati da studiosi di Storia della Scienza. Si tratta degli “Appunti per la Lezione Inaugurale” del suo corso all'Università di Napoli, con commento di Bruno Preziosi e Erasmo Recami.

I commenti delle altre note scientifiche sono stati curati da Ennio Arimondo, Nicola Cabibbo, Massimo Inguscio, Luciano Maiani, Rosario Nunzio Mantegna, Francesco Minardi, Luigi Radicati di Brozolo e Antonio Sasso.

Scrivere una breve storia della vita di Ettore Majorana e delle sue caratteristiche essenziali non è compito facile; la sua misteriosa scomparsa, infatti, ha stimolato nel tempo molte ipotesi e fantasie circa la sua personalità e le motivazioni che hanno indotto il suo comportamento. Per essere concisi e il più vicini possibile alla realtà dei fatti, si è deciso quindi di selezionare le parti salienti della biografia scritta da Edoardo Amaldi che lo ha conosciuto personalmente e gli è stato amico.

Confidiamo che questo volume sia di interesse per gli studiosi di Storia della Scienza e per i ricercatori di fisica che si occupano di problemi correlati alle pubblicazioni di Majorana. Le qualità eccezionali dell'uomo e la profondità delle sue opere giustifica la nostra fiducia e l'impegno richiesto.

Preface

A century after his birth, the figure of Ettore Majorana still arouses deep feelings in all those who studied his scientific work or became acquainted with his personality and appreciated his sensibility and human qualities.

In this occasion the Italian Physical Society presents a collection of Majorana's scientific papers (note scientifiche) in the original language and, for the first time— with three exceptions— translated into English. Each paper is then followed by a comment of an expert in the specific field.

The reason for this not common undertaking stands in the scientific and human character of Ettore Majorana, who can be rightfully considered one of the greatest physicists of the first half of the last century. Enrico Fermi himself had so good an opinion of Majorana that, in a private conversation, he referred to him as a real genius at the same level as Galilei and Newton, such that he could most probably have been, if he only had had a longer life to dedicate to physics.

In the present volume the scientific notes are presented in chronological order following the numbering given by E. Amaldi in his book “La vita e le opere di Ettore Majorana”, published by Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1966.

Not to alter the numeric (and chronological) order, number 1b has been assigned to a talk given by Majorana at the XII General Meeting of the Italian Physical Society in december 1928, when he was still a student. The summary of that talk, dealing with the Thomas-Fermi method, was published in “Il Nuovo Cimento” but for some unknown reason had been previously neglected and left out of Majorana's publication list. It has been recently discovered and analysed by Francesco Guerra and Nadia Robotti, who commented it in this volume.

Among many manuscripts that are available mostly at the “Domus Galileiana” of Pisa, and which have been analysed by experts in the History of Science, one has been chosen to close the volume. It is the “Appunti per la lezione inaugurale” (Notes for the inaugural lecture) of Majorana's course at the University of Naples, with comments by Bruno Preziosi and Erasmo Recami.

The other scientific papers have been commented by Ennio Arimondo, Nicola Cabibbo, Massimo Inguscio, Luciano Maiani, Rosario Nunzio Mantegna, Francesco Minardi, Luigi Radicati di Brozolo and Antonio Sasso.

To write a brief history of the life and character of Ettore Majorana is a difficult task, particularly because his mysterious disappearance has stimulated many hypotheses and fantasies about his personality and the motivations behind his behaviour. To be realistic and concise, we have selected the essential parts of the testimonial writings of E. Amaldi who knew him personally and was his friend.

We believe that this volume will be of interest to the specialists of the History of Science and to the physicists concerned with problems related to Majorana's contributions. The rare qualities of the man and the depth of his work may justify our confidence and our endeavour.

Note biografiche(*)

Ettore Majorana nacque a Catania il 5 agosto 1906 da una nota famiglia di professionisti di quella città. Il padre ing. Fabio Massimo (n. a Catania nel 1875, m. a Roma nel 1934) era fratello minore di Quirino Majorana (1871-1957) noto professore di fisica sperimentale dell'Università di Bologna⁽¹⁾. L'ing. Fabio Massimo era stato per molti anni Direttore dell'Azienda Telefonica di Catania; trasferitosi a Roma era stato nominato nel 1928 Capo Divisione e, qualche anno dopo, Ispettore Generale del Ministero delle Comunicazioni. Dal suo matrimonio con la Sig.ra Dorina Corso (n. a Catania nel 1876, m. a Roma nel 1965) anch'essa di famiglia catanese, erano nati cinque figli: Rosina, sposata più tardi con Werner Schultze, Salvatore, dottore in legge e studioso di filosofia, Luciano, ingegnere civile, specializzato in costruzioni aeronautiche ma che poi si dedicò alla progettazione e costruzione di strumenti per l'astronomia ottica, Ettore e, quinta e ultima, Maria, musicista e insegnante di pianoforte.

I familiari e gli amici di famiglia raccontano che Ettore cominciò a dar prova di attitudine per l'aritmetica e il calcolo numerico già a quattro anni di età: attitudine che manifestava concretamente facendo come gioco, a memoria e in pochi secondi, moltiplicazioni fra numeri entrambi di tre cifre che gli venivano detti dai familiari stessi o dai loro visitatori. Quando uno di questi gli chiedeva di fare un calcolo, il piccolo Ettore si infilava sotto un tavolo quasi cercasse di isolarsi e di lì dava, pochi secondi dopo, la risposta.

A sette anni era divenuto un noto scacchista tanto che la cosa fu riportata nella cronaca cittadina. Dopo aver fatto le prime classi delle scuole elementari in casa, entrò come interno all'Istituto Massimo di Roma⁽²⁾, ove completò le elementari e ove seguì il ginnasio che superò in quattro anni avendo saltato il quinto. Quando nel 1921 la sua

(*) Parzialmente riprodotto, per gentile concessione dell'Accademia Nazionale dei Lincei, da: "La vita e le opere di Ettore Majorana" (Accademia dei Lincei, Roma) 1966. Per rispettare fedelmente il testo originale, i riferimenti temporali sono stati mantenuti inalterati e quindi sono relativi agli anni '60. (Nota del Curatore.)

⁽¹⁾ E. PERUCCA, *Commemorazione del Socio Quirino Majorana*, "Rend. Accad. Lincei", 25, 2° semestre, p. 354. Per l'elenco delle pubblicazioni e alcuni dati biografici vedi anche lo: "Annuario Generale dell'Accademia Nazionale dei XL", Roma, Anno 1953, p. 31.

⁽²⁾ Istituto Parificato Massimiliano Massimo, diretto dai Padri Gesuiti.

famiglia si trasferì a Roma, egli seguì a frequentare come esterno la prima e la seconda liceo all'Istituto Massimo, ma passò, per il terzo anno, al Liceo Statale Torquato Tasso ove, nella sessione estiva del 1923, conseguì la maturità classica con voti elevati⁽³⁾.

Nell'autunno dello stesso anno ETTORE si iscrisse al Biennio di Studi di Ingegneria dell'Università di Roma e prese a frequentare le lezioni e le esercitazioni, regolarmente superando gli esami con voti molto elevati.

Fra i suoi compagni di corso c'era suo fratello Luciano, con cui passava anche buona parte delle ore dedicate allo svago e ai comuni amici: c'erano anche Emilio Segré, oggi professore di Fisica all'Università di Berkeley in California, ed Enrico Volterra, oggi professore di Scienza delle Costruzioni all'Università di Houston nel Texas.

Finito il Biennio di Ingegneria, questo gruppo di giovani, tutti molto brillanti, cominciò a frequentare la Scuola di Applicazione per gli Ingegneri di Roma.

Ettore seguì a riportare voti elevati in tutti gli esami, salvo una bocciatura in idraulica.

Come al biennio così anche alla Scuola di Ingegneria, MAJORANA faceva da consulente a tutti i suoi compagni per la soluzione dei problemi più difficili: in particolare se si trattava di problemi matematici.

Nel periodo in cui frequentava la Scuola di Ingegneria MAJORANA, al pari di alcuni suoi compagni di corso, aveva cominciato a mostrarsi molto critico verso il modo in cui venivano impartiti alcuni degli insegnamenti; egli riteneva che si scendesse troppo spesso nella descrizione di particolari inessenziali mentre non veniva dato abbastanza rilievo alla sintesi generale caratteristica di un solido inquadramento scientifico. Questa sua radicata convinzione era alla base di frequenti vivaci e talvolta aspre discussioni che aveva con alcuni dei professori.

All'inizio del 2° anno della Scuola di Ingegneria (4° dall'inizio degli studi universitari) Emilio Segré decise di seguire una sua vecchia inclinazione e passò agli studi di Fisica. Tale decisione era maturata in lui durante l'estate 1927, periodo in cui aveva conosciuto Franco Rasetti, allora assistente all'Istituto di Fisica dell'Università di Firenze. Attraverso Rasetti, Segré aveva conosciuto anche Enrico Fermi, allora ventiseienne e da poco nominato (novembre 1926) professore straordinario alla Cattedra di Fisica Teorica dell'Università di Roma⁽⁴⁾.

La creazione di questa nuova cattedra era dovuta all'opera di O. M. Corbino professore di Fisica Sperimentale e direttore dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma, il quale, avendo giustamente valutato le eccezionali capacità di Enrico Fermi, aveva iniziato tutta una serie di azioni per creare in Roma una Scuola di Fisica moderna.

⁽³⁾ Il certificato di Diploma di Maturità Classica rilasciato in data 11 maggio 1964 dal Liceo Ginnasio Statale Torquato Tasso riporta le seguenti votazioni:

Italiano: s.sette, o.otto; Latino: s.sette, o.sette; Greco: s.sette, o.sette; Storia e Geografia: otto; Filosofia: sette; Matematica: nove; Fisica: nove; Storia Naturale: sette; Ginnastica: otto.

⁽⁴⁾ Qualche maggiore dettaglio si può trovare nella Nota biografica di Enrico Fermi, scritta da EMILIO SEGRÉ e contenuta nel I volume di *Enrico Fermi, Note e memorie (collected papers)* Accademia Nazionale dei Lincei e the University of Chicago Press, Roma (1962).

Nell'autunno 1927 e all'inizio dell'inverno 1927-28 Emilio Segré, nel nuovo ambiente fisico che si era formato da pochi mesi attorno a Fermi, parlava frequentemente delle eccezionali qualità di ETTORE MAJORANA e, contemporaneamente, cercava di convincere ETTORE MAJORANA a seguire il suo esempio, facendogli notare come gli studi di Fisica fossero assai più consoni di quelli di Ingegneria alle sue aspirazioni scientifiche e alle sue capacità speculative. Il passaggio a Fisica ebbe luogo al principio del 1928 dopo un colloquio con Fermi, i cui dettagli possono servire assai bene a tratteggiare alcuni aspetti del carattere di ETTORE MAJORANA.

Egli venne all'Istituto di Fisica di Via Panisperna e fu accompagnato da Segré nello studio di Fermi ove si trovava anche Rasetti.

Fu in quell'occasione che io lo vidi per la prima volta. Da lontano appariva smilzo, con un'andatura timida quasi incerta; da vicino si notavano i capelli nerissimi, la carnagione scura, le gote lievemente scavate, gli occhi vivacissimi e scintillanti: nell'insieme, l'aspetto di un saraceno.

Fermi lavorava allora al modello statistico che prese in seguito il nome di modello di THOMAS-FERMI.

Il discorso con MAJORANA cadde subito sulle ricerche in corso all'Istituto e Fermi espose rapidamente le linee generali del modello e mostrò a MAJORANA gli estratti dei suoi recenti lavori sull'argomento e, in particolare, la tabella in cui erano raccolti i valori numerici del cosiddetto potenziale universale di Fermi.

MAJORANA ascoltò con interesse e, dopo aver chiesto qualche chiarimento, se ne andò senza manifestare i suoi pensieri e le sue intenzioni. Il giorno dopo, nella tarda mattinata, si presentò di nuovo all'Istituto, entrò diretto nello studio di Fermi e gli chiese, senza alcun preambolo, di vedere la tabella che gli era stata posta sotto gli occhi per pochi istanti il giorno prima. Avutala in mano, estrasse dalla tasca un fogliolino su cui era scritta un'analoga tabella da lui calcolata a casa nelle ultime 24 ore, trasformando, secondo quanto ricorda Segré, l'equazione differenziale del secondo ordine non lineare di THOMAS-FERMI in un'equazione di RICCATI che poi aveva integrato numericamente. Confrontò le due tabelle e, avendo constatato che erano in pieno accordo fra loro, disse che la tabella di FERMI andava bene: e, uscito dallo studio di Fermi, se ne andò dall'Istituto. Dopo qualche giorno passò a Fisica e cominciò a frequentare regolarmente l'Istituto.

Passato a Fisica, ETTORE MAJORANA aveva in breve tempo impressionato tutti per vivezza di ingegno, profondità di comprensione ed estensione di studi che lo rendevano molto superiore a tutti i suoi nuovi compagni. Il suo spirito critico era poi eccezionalmente penetrante e inesorabile tanto che lo avevamo soprannominato il "Grande Inquisitore": nello stesso quadro scherzoso chiamavamo Fermi il "Papa", Rasetti il "Cardinale Vicario" e così via⁽⁴⁾⁽⁵⁾.

La sua capacità di calcolo era poi strabiliante. Non solo faceva completamente a memoria calcoli numerici assai complessi, ma eseguiva a memoria, in venti o trenta

⁽⁵⁾ L. FERMI, *Atoms in the family*, the university of Chicago Press (1954); vedi anche la traduzione in italiano: *Atomi in famiglia*, Mondadori (1954).

secondi; anche il calcolo letterale di integrali definiti sufficientemente complicati da richiedere per un abile matematico un notevole numero di passaggi: eseguiva anche la sostituzione dei limiti letterali o numerici e dava direttamente i risultati finali.

Nel 1928 durante i mesi di maggio e giugno, ossia nel periodo di preparazione e di svolgimento degli esami universitari, avevamo preso l'abitudine di trovarci prima di cena, fra le sette e le otto di sera, alla Casina delle Rose a Villa Borghese. Oltre ad ETTORE MAJORANA, Giovanni Gentile junior, Emilio Segré ed io dell'Istituto di Fisica, venivano Luciano Majorana, Giovanni Enriques, Giovanni Ferro-Luzzi, Gastone Piqué, tutti studenti di ingegneria dello stesso anno di Ettore. Sorseggiando una bibita o mangiando un gelato si discuteva della preparazione degli esami o degli ultimi esami sostenuti, qualcuno di noi fisici raccontava qualche risultato di fisica atomica che aveva appreso recentemente, il più delle volte da Fermi, o qualcuno degli studenti di Ingegneria discuteva delle proprietà del campo elettromagnetico o di qualche sua applicazione o diceva male del professore di Idraulica che era la loro bestia nera. Si parlava anche di letteratura: ETTORE conosceva e apprezzava in generale i classici e prediligeva Shakespeare e Pirandello. Si parlava anche di questioni di cultura varia, nelle quali ETTORE era sempre ferratissimo, un poco di politica, ma soprattutto della spedizione Nobile al Polo Nord che aveva avuto luogo proprio in quell'epoca (marzo-maggio 1928) e che aveva dato origine alle ben note, complesse vicende umane⁽⁶⁾.

I suoi colleghi di corso di Ingegneria spesso prendevano bonariamente in giro Ettore per la sua inattitudine al disegno; descrivevano la scena di Ettore che, alle esercitazioni di geometria proiettiva, prendeva un grande foglio, e dopo qualche ora di lavoro, vi aveva tracciato sopra la sua costruzione, ineccepibile dal punto di vista di principio, ma piccola piccola e messa per storto in un angolino mentre il resto del foglio era restato immacolato. ETTORE ascoltava i racconti degli amici con un'aria lievemente divertita quasi si trattasse di un altro e alla fine commentava tutta la storia e il racconto che ne era stato fatto con qualche battuta fine e spiritosa.

ETTORE MAJORANA, Gabriello Giannini, che nel seguito si affermò come costruttore e industriale elettronico negli Stati Uniti, ed io, ci laureammo lo stesso giorno, il 6 luglio 1929: ETTORE presentava una tesi *Sulla meccanica dei nuclei radioattivi*, di cui fu relatore Fermi, ed ebbe 110/110 e lode⁽⁷⁾. La lettura di questa tesi, anche a distanza di

⁽⁶⁾ Nella seconda spedizione al Polo Nord con dirigibile, organizzata e diretta da U. Nobile (nella prima, che aveva avuto luogo nel 1926 sotto la direzione di R. Amundsen, Nobile aveva avuto il compito di pilotare l'aeronave), al ritorno dal secondo volo sul Polo il dirigibile Italia precipitava sulla banchisa distruggendosi e lasciando sul ghiaccio alcuni naufraghi. Nelle vicende che ne seguirono, trovarono la morte otto membri della spedizione oltre a sei persone che avevano tentato di portare soccorso ai naufraghi; fra queste anche R. Amundsen.

⁽⁷⁾ Il certificato di Laurea in Fisica, rilasciato in data 15 maggio 1964 dall'Università di Roma, riporta le seguenti votazioni:

Algebra: Trenta; Geometria Analitica e Proiettiva: Trenta con lode; Chimica Applicata: Ventisette; Meccanica Razionale: Trenta con lode; eser. Disegno con elementi di macchine: Diciotto; Calcolo delle probabilità: Ventisette; Geometria descrittiva: Trenta; Fisica: Trenta; Fisica Superiore: Trenta con lode; Fisica Terrestre: trenta con lode; Esercizi di Fisica: Trenta; Fisica

quasi quarant'anni, colpisce per la chiarezza della impostazione e l'approfondimento dei problemi relativi alla struttura dei nuclei e alla teoria del loro decadimento alfa.

Dopo la laurea, Ettore continuò a frequentare l'Istituto dove passava più o meno regolarmente un paio di ore al mattino, dalle 10,30-11 alle 12,30-13, e qualche ora nel pomeriggio, dalle 5 alle 7,30.

Queste ore venivano trascorse in biblioteca ove studiava soprattutto i lavori di DIRAC, HEISENBERG, PAULI, WEYL e WIGNER.

Gli ultimi due autori erano forse i soli per cui egli esprimesse ammirazione senza riserve. Questa era dovuta, almeno in buona parte, al suo interesse particolarmente vivo, quasi profetico, per la teoria dei Gruppi e le sue applicazioni alla fisica. In più occasioni in quell'epoca MAJORANA espresse l'intenzione di scrivere un libro su questo argomento; e Segré crede anzi di ricordare di avergli sentito dire che ne aveva scritto qualche capitolo.

I suoi giudizi su scienziati viventi, anche di primo piano, erano quasi sempre oltremodo severi, tanto da far sorgere il sospetto di una presunzione e di un orgoglio del tutto eccezionali; se non che tale severità si attenuava o addirittura scompariva nel caso dei suoi amici, mentre altrettanto severi erano i giudizi che egli faceva intendere implicitamente su se stesso e che manifestava esplicitamente sul suo lavoro. Le persone a lui vicine avevano così finito con il comprendere che tanta severità non era altro che la manifestazione di uno spirito insoddisfatto e tormentato. Sotto un apparente isolamento dal prossimo non solo di fatto ma anche di sentimenti, si nascondeva una sensibilità vivissima che lo portava a stringere solo raramente rapporti di amicizia: ma allora questi erano dotati della profondità caratteristica della sua regione di origine.

Si era legato di particolare amicizia con me e ancor più con Giovanni Gentile junior (1906-1942)⁽⁸⁾. Quest'ultimo si era laureato in Fisica a Pisa nel novembre 1927 ed era stato subito dopo nominato assistente incaricato presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Roma ove trascorse circa sei mesi dell'anno accademico 1927-28. Fu in questo periodo che egli conobbe e si legò di amicizia con Ettore, in collaborazione del quale fece più tardi il lavoro sullo sdoppiamento dei termini Roentgen (n. 1) [Corrispondente a n. 1a in questo volume].

Oltre che sull'affinità degli argomenti dei loro lavori di ricerca giovanili, l'amicizia tra Ettore Majorana e Giovanni Gentile junior si fondava sulla comune origine siciliana e sulla conseguente analogia, strutturale e affettiva, delle loro famiglie.

Il 12 novembre 1932 egli conseguì la libera docenza in Fisica Teorica: presentava solo cinque lavori, ma la commissione, composta da Enrico Fermi, Antonino Lo Surdo ed Enrico Persico, fu unanime nel riconoscere nel candidato "una completa padronanza della fisica teorica⁽⁹⁾".

Matematica: Trenta con lode.

⁽⁸⁾ C. POLVANI, *Giovanni Gentile junior*, "Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere", 75, fasc. II (1941-42); C. SALVETTI, *Giovanni Gentile junior*, "Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano", 16 (1942).

⁽⁹⁾ La relazione della Commissione Giudicatrice per l'abilitazione alla libera docenza in Fisica Teorica è pubblicata nel: "Bollettino del Ministero dell'Educazione Nazionale", Anno 60°, Vol.

Dal punto di vista della produzione scientifica quegli anni rappresentano la prima delle due fasi della troppo breve attività di ricerca di Ettore Majorana.

Questa prima fase comprende i lavori dal n. 1 al n. 6 che si riferiscono tutti a problemi di fisica atomica e molecolare: la seconda fase, documentata dai lavori n. 7, 8 e 9, riguarda invece problemi di fisica del nucleo o proprietà dei corpuscoli elementari.

I lavori appartenenti alla prima fase possono venir ulteriormente divisi in tre gruppi. Il primo è costituito dai lavori n. 1, 3 e 5 e riguarda problemi di spettroscopia atomica: il secondo gruppo comprende i lavori n. 2 e n. 4 che trattano alcune questioni relative al legame chimico. Il terzo gruppo infine comprende il solo lavoro n. 6 il quale verte sul problema del ribaltamento dello *spin* (*spin-flip*) non adiabatico in un fascio di atomi polarizzati.

Il lavoro n. 1, in collaborazione con GIOVANNI GENTILE junior, riguarda lo sdoppiamento dovuto allo *spin* dell'elettrone dei termini Roentgen 3^M del gadolinio ($Z = 64$) e dell'uranio ($Z = 92$) e dei termini ottici P del cesio ($Z = 55$) e il calcolo dell'intensità delle righe del cesio. Il calcolo viene eseguito a mezzo della teoria delle perturbazioni facendo uso delle autofunzioni dell'elettrone negli stati considerati ottenute con il metodo di THOMAS-FERMI.

Il lavoro n. 3 si riferisce a due righe che erano state scoperte recentemente nello spettro dell'elio e che non erano interpretabili come combinazione di termini conosciuti. Lo scopritore (P. G. KRUGER) aveva proposto di interpretare queste due righe come dovute alla transizione da uno stato normale a due nuovi stati "accentati", ossia stati con due elettroni eccitati, i quali, essendo situati al di sopra della energia di ionizzazione dell'atomo di elio, avevano la possibilità di dar luogo a transizioni a stati dello spettro continuo ossia a processi di ionizzazione spontanea. A mezzo di un'analisi basata sulle proprietà di simmetria delle autofunzioni imperturbate dei 16 stati che si ottengono combinando fra loro due orbitali di numero quantico totale 2, e di calcoli perturbativi spinti a termini del secondo ordine, Ettore Majorana giunge a confermare la interpretazione proposta originariamente per una delle due righe e ad escludere che l'altra fosse dovuta all'atomo di elio.

In questo lavoro è assai interessante la discussione delle proprietà di simmetria dei diversi stati rispetto allo scambio degli *spin* degli elettroni (stati di singoletto e di tripletto), alle rotazioni spaziali (quanto azimutale o momento della quantità di moto orbitale), alle rotazioni assiali (quanto magnetico) e alle riflessioni nel centro di forza (parità).

Il lavoro n. 5, terzo ed ultimo dei lavori di spettroscopia atomica, riguarda i cosiddetti tripletti P' incompleti del calcio. Come si è detto a proposito del lavoro n. 3, i termini accentati sono termini con due elettroni eccitati; ora, nello spettro del calcio erano noti a quell'epoca cinque gruppi di righe spettrali ciascuno composto da sei righe, dovute alla combinazione di termini normali e termini ordinabili in serie il cui limite corrisponde al calcio ionizzato una volta, avente però l'elettrone esterno nello stato eccitato 3^d invece che nello stato $1s$, come accade per le serie normali. Alcuni di questi termini, corrispondenti a configurazioni con 2 elettroni eccitati, sono situati al di sopra del potenziale di ioniz-

zazione e ciò non ostante sono stabili, nel senso che non danno luogo ad un'apprezzabile ionizzazione spontanea. Questa stabilità, come fece notare MAJORANA, è dovuta al fatto che, nella approssimazione non relativistica, i detti termini hanno tali caratteri di simmetria che la transizione allo spettro continuo è rigorosamente proibita. Ma la presenza dei momenti magnetici intrinseci degli elettroni determina una leggera instabilità che solo in circostanze eccezionali può assumere importanza apprezzabile. È ciò che accade, come dimostrò MAJORANA, per la componente $J = 2$ dei tripletti anomali dello zinco, cadmio e mercurio, mentre nel caso del calcio l'esperienza mostra che proprio questa componente è assente o per lo meno molto debole.

Passando dai lavori di spettroscopia atomica ai lavori sul legame chimico, va notato fin d'ora che fu proprio attraverso lo studio approfondito di questi problemi che MAJORANA si impadronì della teoria quantistica del legame chimico di HEITLER E LONDON⁽¹⁰⁾, circostanza, questa, che doveva risultare di grande importanza per la sua futura attività di ricerca. La sua conoscenza approfondita del meccanismo di scambio degli elettroni di valenza, che è alla base della teoria quantistica del legame chimico omeopolare, costituirà infatti più tardi il punto di partenza per l'ipotesi che le forze nucleari siano forze di scambio.

Il lavoro n. 2, sulla formazione dello ione molecolare di elio, parte da osservazioni spettroscopiche allora recenti, che avevano messo in evidenza alcune bande attribuite allo ione molecolare He_2^+ . A mezzo di un calcolo di prima approssimazione, Majorana trova poi la distanza di equilibrio dei due nuclei nello ione He_2^+ ; e per la loro frequenza di oscillazione giunge a valori che si accordano molto bene con i valori trovati sperimentalmente.

Nel lavoro n. 4 MAJORANA studia in dettaglio le caratteristiche di un termine anomalo pari di singoletto (detto termine X) piuttosto profondo che era stato recentemente osservato nello spettro della molecola di idrogeno e che era stato interpretato come un termine accentato.

L'ultimo lavoro del periodo di attività dedicato a problemi di fisica atomica e molecolare è il n. 6.

Esso riguarda il problema del calcolo della probabilità di ribaltamento (*spin-flip*) dello *spin* degli atomi di un raggio di vapore polarizzato quando questo si muove in un campo magnetico rapidamente variabile.

Se il campo magnetico cambia lentamente di direzione, l'orientamento dell'atomo segue adiabaticamente la direzione del campo; ma che cosa accade se la variazione di direzione del campo non è adiabatica? In particolare, cosa accade se l'atomo passa in prossimità di un punto ove il campo magnetico è zero?

Il problema era stato discusso fin dai primi tempi della meccanica quantistica da DARWIN e LANDÉ⁽¹¹⁾; e STERN, che aveva fatto qualche anno prima con GERLACH le famose

⁽¹⁰⁾ W. WEITLER e F. LONDON, "Z. Physik", 44, 455 (1927); F. LONDON, "Z. Physik", 46, 455 (1927); 50, 24 (1928); W. HEITLER, "Z. Physik", 46, 47 (1927); 47, 835 (1925); "Physik. Z.", 31, 185 (1930).

⁽¹¹⁾ C.G. DARWIN, "Proc. Roy. Soc. (London)", A 117, 258 (1928); A. LANDÉ, "Naturwiss.", 17, 634 (1929).

esperienze sulla quantizzazione spaziale, si era proposto di verificare quantitativamente le previsioni teoriche anche per quanto riguardava le probabilità di transizione nel caso non adiabatico. Il problema si può enunciare nel seguente modo: si abbia un sistema quantizzato (come per esempio un atomo o una molecola) di momento angolare totale J e numero quantico magnetico m rispetto alla direzione di un campo magnetico costante nel tempo; si vuoi sapere quale o quali sono gli stati finali del sistema se il campo si mette a variare rapidamente con il tempo, in grandezza e direzione, secondo una certa funzione vettoriale $\vec{H}(t)$.

Nel suo lavoro MAJORANA dimostra che l'effetto globale di un campo magnetico variabile $\vec{H}(t)$ su di un corpuscolo di momento angolare $J = 1/2$ e data componente m lungo l'asse della z , può venir descritto come una brusca rotazione di un angolo α del momento angolare totale. Dopo che ha avuto luogo la rotazione dell'angolo α , il sistema non è più in uno stato di ben definita quantizzazione spaziale rispetto alla direzione originale del campo, ma deve essere descritto a mezzo di un pacchetto d'onde costituito dalla sovrapposizione di $2J + 1$ stati, ciascuno caratterizzato da un diverso valore del numero quantico magnetico m' , e da una corrispondente ampiezza di probabilità. Il problema fu in realtà trattato e risolto da MAJORANA con straordinaria eleganza e concisione solo per il caso particolare $J = 1/2$; ma, come egli stesso fa notare, il metodo si presta facilmente ad una estensione al caso generale di J qualsiasi.

Da quanto detto sopra, ma ancor più da un esame approfondito di questi lavori, si resta colpiti dalla loro alta classe: essi rivelano una profonda conoscenza dei dati sperimentali anche nei più minuti dettagli, una disinvoltura non comune, soprattutto a quella epoca, nello sfruttare le proprietà di simmetria degli stati per semplificare i problemi o per la scelta della più opportuna approssimazione per risolvere quantitativamente i singoli problemi, qualità quest'ultima che senza alcun dubbio derivava, almeno in parte, dalle sue eccezionali doti di calcolatore.

L'interesse di MAJORANA per la fisica nucleare, che già si era manifestato nella sua tesi di laurea, si ravvivò fortemente con l'apparire dei classici lavori che dovevano portare alla scoperta del neutrone, all'inizio del 1932. In realtà questo suo rinnovato interesse rientrava nel suo nuovo orientamento generale di tutto l'Istituto di via Panisperna ove già da qualche anno si parlava dell'opportunità di abbandonare, sia pure gradualmente, la fisica atomica, campo in cui tutti avevano lavorato per vari anni, e di far convergere il principale sforzo di ricerca su problemi di fisica nucleare.

Il primo a pubblicare che il nucleo è costituito soltanto di protoni e neutroni è stato probabilmente IWANENKO⁽¹²⁾. Né io né altri degli amici interpellati ricorda se ETTORE MAJORANA fosse giunto a questa conclusione indipendentemente; quello che è certo è che, prima di Pasqua di quello stesso anno, egli aveva cercato di fare la teoria dei nuclei leggeri ammettendo che i protoni e i neutroni (o protoni neutri come lui diceva allora) ne fossero i soli costituenti e che i primi interagissero con i secondi con forze di scambio. Egli era giunto anche alla conclusione che si dovesse trattare di forze di scambio delle sole

⁽¹²⁾ D. IWANENKO, "Nature (London)", 129, 798 (1932).

coordinatee spaziali (e non degli *spin*) se si voleva far sì che il sistema saturato rispetto all'energia di legame fosse la particella alfa e non il deutone.

Aveva parlato di questo abbozzo di teoria agli amici dell'Istituto, e Fermi, che ne aveva subito riconosciuto l'interesse, gli aveva consigliato di pubblicare al più presto i suoi risultati, anche se parziali. Ma Ettore non ne volle sapere perché giudicava il suo lavoro incompleto.

Nel fascicolo di "Zeitschrift für Physik" datato 19 luglio 1932, apparve il primo lavoro di HEISENBERG⁽¹³⁾ sulle forze di "scambio alla HEISENBERG", ossia forze che coinvolgono lo scambio delle coordinate sia spaziali che di *spin*.

Questo lavoro suscitò molta impressione nel mondo scientifico; era il primo tentativo di una teoria del nucleo che, per quanto incompleta e imperfetta, permetteva di superare alcune delle difficoltà di principio che fino ad allora erano sembrate insormontabili.

Fermi si adoperò nuovamente perché MAJORANA pubblicasse qualche cosa, ma ogni suo sforzo e ogni sforzo di noi suoi amici e colleghi fu vano. Alla fine però Fermi riuscì a convincerlo ad andare all'estero, prima a Lipsia e poi a Copenhagen, e gli fece assegnare dal Consiglio Nazionale delle Ricerche una sovvenzione per tale viaggio che ebbe inizio alla fine di gennaio del 1933 e durò fra sei e sette mesi.

L'avversione a pubblicare o comunque a rendere noti i suoi risultati che appare da questo episodio faceva parte di un suo atteggiamento generale. Talvolta nel corso di una conversazione con qualche collega diceva quasi incidentalmente di aver fatto durante la sera precedente il calcolo o la teoria di un fenomeno non chiaro che era caduto sotto l'attenzione sua o di qualcuno di noi in quei giorni. Nella discussione che seguiva, sempre molto laconica da parte sua, ETTORE a un certo punto tirava fuori dalla tasca il pacchetto delle sigarette macedonia (era un fumatore accanito) sul quale erano scritte, in una calligrafia minuta ma ordinata, le formule principali della sua teoria o una tabella di risultati numerici. Copiava sulla lavagna parte dei risultati, quel tanto che era necessario per chiarire il problema, e poi, finita la discussione e fumata l'ultima sigaretta, accartocciava il pacchetto nella mano e lo buttava nel cestino.

Prima di partire per Lipsia, MAJORANA pubblicò un altro lavoro, il n. 7, sulla teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario. Questo è il suo primo lavoro che riguarda le particelle elementari e non aggregati di particelle quali sono gli atomi ed i nuclei.

Nel mese di gennaio MAJORANA partì per Lipsia ove rimase fino all'inizio dell'estate; da Lipsia andò a Copenhagen ove trascorse circa tre mesi, e di lì di nuovo a Lipsia ove si fermò per un periodo di circa un mese, prima di tornare definitivamente in Italia all'inizio dell'autunno 1933.

Lipsia in quegli anni era uno dei maggiori centri di fisica moderna; attorno a W. Heisenberg si era raccolto un gruppo di giovani di eccezione, fra i quali F. Bloch, F. Hund, R. Peieris e, fra gli ospiti, E. Feenberg, D. R. Inglis e E. G. Uhlenbeck.

⁽¹³⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", 77, 1 (1932).

MAJORANA in quel periodo si legò ad Heisenberg per cui conservò sempre profonda ammirazione e senso di amicizia. Fu Heisenberg che lo convinse senza sforzo, con il solo peso della sua autorità, a pubblicare il suo lavoro sulla teoria del nucleo che apparve nel corso dello stesso anno sia su “*Zeitschrift für Physik*” (n. 8a) che sulla “*Ricerca Scientifica*” (n. 8b).

Quando nell'autunno del 1933 tornò a Roma, Ettore non stava bene in salute a causa di una gastrite i cui primi sintomi si erano manifestati in Germania. Quale fosse l'origine di questo male non è chiaro, ma i medici di famiglia lo collegarono con un principio di esaurimento nervoso.

Egli cominciò a frequentare l'Istituto di via Panisperna solo saltuariamente e con il passare dei mesi non venne più affatto: trascorreva sempre più le sue giornate in casa immerso nello studio per un numero di ore del tutto eccezionale.

Gli interessi filosofici, che sempre erano stati vivi in lui, si erano fortemente accentuati, tanto da spingerlo a meditare a fondo le opere di vari filosofi, in particolare quelle di SCHOPENHAUER.

Probabilmente risale a quell'epoca il manoscritto sul valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali che, trovato fra le sue carte dal fratello Luciano, fu pubblicato dopo la sua scomparsa (n. 10) a cura di GIOVANNI GENTILE junior.

A questi interessi vecchi e nuovi se ne era aggiunto un altro, la medicina, argomento che affrontava forse anche nel desiderio di comprendere i sintomi e la portata del suo male.

Era ormai giunta l'ora per un nuovo concorso in Fisica Teorica; il primo e solo concorso per cattedre di questa materia aveva avuto luogo nel 1926 e aveva portato alla Cattedra Enrico Fermi, a Roma, ed Enrico Persico a Firenze. Il concorso fu bandito al principio del 1937 su richiesta dell'Università di Palermo, spinta a far ciò da Segré che nel frattempo era diventato professore di Fisica Sperimentale in quella Università.

C'era naturalmente il problema di far concorrere Ettore, il quale sembrava che non ne volesse sapere e che comunque ormai da qualche anno non aveva più pubblicato lavori di fisica. Fermi e i vari amici si adoperarono in questo senso e Majorana infine si convinse a gran fatica a prendere parte al concorso e mandò alla stampa su “*Il Nuovo Cimento*” il lavoro sulla teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone (n. 9).

Dall'esame dei singoli lavori di Majorana viene naturale porsi il difficile problema di dare, nei limiti del possibile, una valutazione di insieme della sua figura di scienziato. Non vi è alcun dubbio che egli aveva una mente matematica, soprattutto analitica, straordinaria e uno spirito critico del tutto eccezionale. Ma forse, proprio questo acutissimo spirito critico, unito alla mancanza di alcune doti di equilibrio d'insieme sul piano umano, ostacolarono le sue capacità di sintesi creativa, così da non permettergli di raggiungere una produttività scientifica confrontabile con quella esplicitata, alla stessa età, dai maggiori fisici contemporanei.

Ciò non toglie che la scelta di alcuni dei problemi da lui trattati, i metodi seguiti nella loro trattazione e, più in generale, la scelta dei mezzi matematici per affrontarli, mostrano una naturale tendenza a precorrere i tempi, che in qualche caso ha quasi del profetico.

La commissione per giudicare il concorso di Fisica Teorica dell'Università di Palermo risultò così composta: Antonio Carrelli, Enrico Fermi, Orazio Lazzarino, Enrico Persico e

Giovanni Polvani. La Commissione tenne una prima seduta nel corso del mese di ottobre 1937 ma subito fu invitata dal Ministro dell'Educazione Nazionale a sospendere i lavori allo scopo di poter accogliere la sollecitazione del senatore Giovanni Gentile a procedere alla nomina (in base all'Art. 8 del R.D.L. 20 giugno 1935 n. 1071) del concorrente ETTORE MAJORANA a professore ordinario di Fisica Teorica nella R. Università di Napoli. Il suddetto articolo si riferiva a meriti speciali; esso era stato fatto qualche anno prima allo scopo di rendere possibile la nomina di Guglielmo Marconi alla cattedra di Onde Elettromagnetiche dell'Università di Roma senza concorso.

Nominato professore di Fisica Teorica a Napoli nel novembre 1937, ETTORE MAJORANA si trasferì in quella città ai primi di gennaio dell'anno successivo e si stabilì in un primo tempo in una camera dell'Albergo Patria, e poi dell'Albergo Bologna che dava sulla Via De Pretis affollata di traffico.

A Napoli si legò d'amicizia con Antonio Carrelli, professore di Fisica Sperimentale e direttore dell'Istituto di Fisica di quella Università.

In una lettera inviata alla madre in data il gennaio 1938 egli comunicava che avrebbe iniziato le lezioni due giorni dopo, giovedì 13 alle ore 9; di essere riuscito ad evitare ogni carattere ufficiale all'apertura del corso e aggiungeva: "anche per questo non vi consiglierai di venire". Più avanti nella lettera scriveva: "Ho trovato giacente da ben due mesi una lettera del Rettore in cui mi annunciava la mia nomina 'per alta fama di singolare perizia...'. Non avendolo trovato, gli ho risposto con una lettera altrettanto elevata". Per chi lo ha conosciuto di persona, questa frase ha un tono di leggera e garbata ironia verso la legge che contiene proprio quella frase, verso il Rettore e sopra tutto verso se stesso. Lo stesso tono ha il resto della lettera ove si parla dell'Istituto di Fisica di Napoli, di alcuni colleghi, per cui ha espressioni amichevoli, e dei loro assistenti.

Ma la lettera è al tempo stesso una chiara manifestazione del suo vivo affetto e forte attaccamento alla madre e ai fratelli.

Va anche detto, incidentalmente, che nonostante la sua estrema riservatezza su argomenti di questo genere e la sua palese trascuratezza nei riguardi delle pratiche religiose, tutto fa ritenere che egli avesse conservato dalla educazione giovanile uno spirito sostanzialmente religioso.

Anche a Napoli, come del resto aveva sempre fatto a Roma, conduceva una vita estremamente ritirata; al mattino, quando doveva fare lezione, andava all'Istituto e nel tardo pomeriggio faceva lunghe passeggiate nei quartieri più vivi della città.

Anche a Napoli, come a Roma negli anni precedenti, Majorana era tormentato dalla sua malattia che finiva inevitabilmente con l'averne una influenza sul suo umore e anche sul suo carattere. Questo spiega forse l'eccessivo dispiacere che egli provò, a quanto racconta Carrelli, quando, dopo qualche mese di insegnamento, si rese conto che ben pochi degli studenti erano in grado di seguire e apprezzare le sue lezioni sempre oltremodo elevate.

Il giorno 26 marzo 1938 Carrelli, con grande meraviglia, ricevette da Palermo un telegramma lampo da parte di Ettore Majorana in cui gli diceva di non preoccuparsi per quanto era scritto nella lettera che gli aveva mandato. La lettera purtroppo andò persa, ma una frase rimase impressa nella memoria di Carrelli e suonava all'incirca in questo

modo: “Non sono una ragazza ibseniana, comprendimi, il problema è molto più grosso...”. La lettera si chiudeva con un caldo saluto a Carrelli che ringraziava per l’amicizia che gli aveva dimostrato negli ultimi mesi.

Carrelli, sconvolto da tale lettura, chiamò subito al telefono Fermi il quale a Roma si mise in contatto con il fratello Luciano: questi si recò immediatamente a Napoli ove iniziava una affannosa ricerca di informazioni su Ettore. Tale ricerca, condotta sia a Palermo che a Napoli, permise di stabilire che Ettore era partito da Napoli per Palermo con il piroscalo della Società Tirrenia nella notte dal 23 al 24 marzo e che era giunto a Palermo ove era stato un paio di giorni e donde, il 25, aveva spedito sia la lettera che il telegramma a Carrelli. La sera del giorno stesso aveva ripreso il piroscalo per Napoli. Il prof. Michele Strazzeri dell’Università di Palermo lo vide quella notte a bordo e anzi alle prime luci dell’alba, mentre il piroscalo entrava nel Golfo di Napoli, lo scorse dormire nella sua cabina. Un marinaio testimoniò di averlo visto a poppa della nave dopo Capri non molto prima che questa attraccasse al molo di Napoli.

Le indagini furono condotte per oltre tre mesi sia dalla Polizia che dai Carabinieri e con l’interessamento personale di Mussolini a cui la Madre aveva scritto una lettera accompagnata da una di Fermi in cui, fra l’altro questi diceva⁽¹³⁾: “... Io non esito a dichiararvi, e non lo dico quale espressione iperbolica, che fra tutti gli studiosi italiani e stranieri che ho avuto occasione di avvicinare, il MAJORANA è quello che per profondità di ingegno mi ha maggiormente colpito. Capace nello stesso tempo di svolgere ardite ipotesi e di criticare acutamente l’opera sua e degli altri, calcolatore espertissimo e matematico profondo che mai per altro perde di vista dietro il velo delle cifre e degli algoritmi l’essenza reale del problema fisico, ETTORE MAJORANA ha al massimo grado quel raro complesso di attitudini che formano il tipico teorico di gran classe...”.

⁽¹³⁾ Questa lettera di Fermi, di cui è rimasta una copia a mano fatta da Luciano Majorana prima che fosse spedita a Mussolini, è scritta con uno stile molto diverso da quello usuale di Fermi. Può darsi che ciò sia dovuto in parte alle circostanze drammatiche in cui fu scritta, in parte al fatto che Fermi scriveva a Mussolini.

Il giudizio di Fermi su Ettore Majorana fu tuttavia espresso in varie altre occasioni, in particolare in una conversazione che egli ebbe con Giuseppe Cocconi nei giorni che seguirono la scomparsa di Ettore, e su cui Cocconi stesso mi inviò, su mia richiesta, una lettera in data 18 luglio 1965. Subito dopo la laurea, conseguita alla fine del 1937 a Milano, G. Cocconi era venuto a Roma e nel gennaio 1938 aveva cominciato a lavorare con E. Fermi e G. Bernardini sui prodotti di decadimento dei mesoni della radiazione cosmica.

Aveva così avuto modo di vedere Majorana una volta che era passato all’Istituto per salutare Fermi e poi aveva assistito, nei drammatici giorni della scomparsa di Ettore, a varie telefonate e conversazioni di Fermi.

Fu in quei giorni che Fermi disse a Cocconi qualche cosa che suonava più o meno come segue: “Perché, vede, al mondo ci sono varie categorie di scienziati; gente di secondo e terzo rango, che fan del loro meglio ma non vanno molto lontano. C’è anche gente di primo rango, che arriva a scoperte di grande importanza, fondamentali per lo sviluppo della scienza. Ma poi ci sono i geni, come Galileo e Newton. Ebbene, Ettore Majorana era uno di quelli. Majorana aveva quel che nessun altro al mondo ha; sfortunatamente gli mancava quel che invece è comune trovare negli altri uomini, il semplice buon senso”.

La famiglia promise un premio, allora cospicuo, di 30 mila lire a chi avesse dato notizie di ETTORE e pubblicò per mesi sui maggiori quotidiani un appello ad ETTORE perché tornasse a casa: il Vaticano cercò di stabilire se si fosse rinchiuso in un convento. Ma tutti i tentativi furono vani. Nessuna traccia fu mai più trovata: solo si seppe che qualche giorno prima della partenza di ETTORE MAJORANA per Palermo, si era presentato alla Chiesa del Gesù Nuovo, situata a Napoli vicino all'Albergo Bologna, un giovane uomo molto agitato le cui caratteristiche somatiche e psichiche parvero ai parenti corrispondere a quelle di ETTORE. Inoltre, Padre De Francesco, ex provinciale dei Gesuiti, che aveva ricevuto il giovane ritenne di riconoscerlo nella fotografia di ETTORE, mostratagli dai parenti.

Il giovane chiese a Padre De Francesco di “fare un esperimento di vita religiosa” espressione che secondo i fratelli va intesa come: “fare gli esercizi spirituali”. Alla risposta che egli poteva, sì, avere ospitalità, ma solo a breve termine — in quanto per una soluzione definitiva sarebbe stato necessario, per l'Ordine, entrare in Noviziato — il giovane rispose: “Grazie, scusi” e se ne andò.

L'ipotesi che trovò più credito tra gli amici, fu che egli si fosse buttato in mare: ma tutti gli esperti delle acque del Golfo di Napoli sostengono che il mare, prima o poi, ne avrebbe restituito il cadavere.

Non si è saputo più nulla: tutti sono rimasti con un senso di profonda amarezza per la perdita, chi di un parente, chi di un amico, gentile, riservato e schivo da manifestazioni esteriori, così evidentemente affettuoso anche se profondamente amaro: un senso di frustrazione per tutto quello che il suo ingegno non ha lasciato ma che avrebbe ancora potuto produrre se non fosse intervenuta la sua assurda scomparsa; e soprattutto un senso di profondo e ammirato stupore per la sua figura di uomo e di pensatore che era passata tra noi così rapidamente, come un personaggio di Pirandello carico di problemi che portava con sé, tutto solo; un uomo che aveva saputo trovare in modo mirabile una risposta ad alcuni quesiti della natura, ma che aveva cercato invano una giustificazione alla vita, alla sua vita, anche se questa era per lui di gran lunga più ricca di promesse di quanto essa non sia per la stragrande maggioranza degli uomini.

EDOARDO AMALDI
Roma, 1966



Ettore Majorana in the 1920's at the "Liceo".



Viareggio pinewood, summer 1926. Ettore Majorana (third from the right), his mother and sisters (Rosina and Maria), his friend G. Piqué and his grandmother.



Karlsbad, autumn 1931. Ettore Majorana (second from the right) with his family.



In Venice with his family in summer 1930.



Marino, winter 1934. Ettore Majorana (second from the right) with some friends.

Brief Biography^(*)

Ettore Majorana was born in Catania on 5 August, 1906, of a well-known professional family of that town. His father, an engineer, Fabio Massimo (b. in Catania 1875 - d. in Rome 1934), was the younger brother of Quirino Majorana (1871-1957), a well-known professor of experimental physics at the University of Bologna⁽¹⁾. Fabio Massimo was for many years Director of the Telephone Service of Catania; moving to Rome in 1928, he was appointed Head of Division and a few years later Inspector-General of the Ministry of Communications. He married Miss Dorina Corso (b. in Catania 1876 - d. in Rome 1965), also of a Catanian family, and they had five children; Rosina, who later married Werner Schultze; Salvatore, a Doctor of Law interested in philosophical studies; Luciano, a civil engineer who specialized in aircraft construction but later devoted himself to the design and construction of instruments for optical astronomy, Ettore and the fifth and last, Maria, a musician and piano teacher.

Members of his family and their friends say that Ettore had already begun to show signs of a gift for arithmetic and numerical calculation when he was four years old; this revealed itself in his favourite game of multiplying in his head in a few seconds two three-figure numbers given to him by members of his family or their friends. When one of them asked him to do a sum, little Ettore slipped under a table as if he wanted to isolate himself, and gave the answer from there a few seconds later.

By the time he was seven he had become such a well-known chess player that this was mentioned in the local newspaper. After having completed his first years of schooling at home, he went as a boarder to the Istituto Massimo in Rome⁽²⁾, where he completed

(*) Partially reproduced from E. Amaldi, "Ettore Majorana: Man and Scientist", in *Strong and Weak Interactions. Present Problems*, edited by A. Zichichi, Academic Press, New York (1966). In order not to alter the original text, references to time (related to the sixties) have been kept unchanged. (Note of the Editor.)

⁽¹⁾ E. PERUCCA, *Commemorazione del Socio Quirino Majorana*, "Rend. Accad. Lincei", **25**, 2° semestre, p. 354. For a list of publications and some biographical data see also the "Annuario Generale dell'Accademia Nazionale dei XL", Rome, 31 (1953).

⁽²⁾ "Istituto Parificato Massimiliano Massimo" directed by Jesuit fathers.

his elementary education and then went through secondary school in four years, jumping the fifth. When his family moved to Rome in 1921, he continued as a day boy at the Istituto Massimo during the first and second years of the “liceo”, and for the third year went to the Liceo Statale Torquato Tasso, where in the summer term of 1923 he passed his “maturità classica” with high marks⁽³⁾.

In the autumn of the same year Ettore entered the “Biennio di Studi di Ingegneria”^(*) at the University of Rome and began to follow the lectures and training courses regularly, passing the examinations with very high marks.

Among his fellow students was his brother Luciano, with whom he also spent a great deal of the time he devoted to leisure and to seeing their mutual friends: other fellow students were Emilio Segré, now Professor of Physics at the University of Berkeley in California, and Enrico Volterra, now Professor of Civil Engineering at the University of Houston, Texas.

After having completed the “Biennio di Studi di Ingegneria”, this group of students, all very brilliant, went to the “Scuola di Applicazione per gli Ingegneri”^(**) in Rome.

Ettore went on to obtain high marks in all subjects except hydraulics, in which he failed.

At both the “Biennio” and the “Scuola di Ingegneria” he acted as consultant to all his companions for the solution of the most difficult problems, particularly in mathematics.

While he was at the Scuola di Ingegneria, Majorana, together with some of his fellow students, grew very critical of the way in which some of the subjects were taught; he felt that too much time was spent on unnecessary detail and not enough on the general synthesis needed for serious and systematic scientific study. This deep-rooted conviction of his frequently gave rise to lively, and sometimes heated, discussions with some of the professors.

At the beginning of the second year of the “Scuola di Ingegneria” (the fourth University year) Emilio Segré decided to follow an earlier inclination of his and switch to physics. He had reached this decision during the summer of 1927 when he had made the acquaintance of Franco Rasetti, then a lecturer at the Physics Institute of the University of Florence. Through Rasetti, Segré had also made the acquaintance of Enrico Fermi, who was then 27 and had recently (November, 1926) been appointed extraordinary Professor of Theoretical Physics at the University of Rome⁽⁴⁾.

⁽³⁾ The “Diploma di Maturità Classica” certificate (equivalent to general certificate of education) released on 11 May 1964 by the Liceo Ginnasio Statale Torquato Tasso shows the following marks (full mark: 10): Italian: written 7, oral 8; Latin: written 7, oral 8; Greek: written 7, oral 7; History and Geography: 8; Philosophy: 7; Mathematics: 9; Physics: 9; Natural History: 7; Gymnastics; 8.

^(*) Initial two-year science and engineering course.

^(**) School of engineering (final three year course).

⁽⁴⁾ Further details are given in the biographical note on Enrico Fermi by Emilio Segré appearing in Vol. 1 of *Enrico Fermi, Note e Memorie (Collected papers)* Accademia Nazionale dei Lincei and the University of Chicago Press, Rome (1962).

The creation of this new chair was due to the efforts of O. M. Corbino, Professor of Experimental Physics and Director of the Physics Institute of the University of Rome, who, realizing Enrico Fermi's exceptional qualities, had taken a series of steps to set up a modern school of physics in Rome.

During the autumn and early winter of 1927 Emilio Segré often talked about Ettore Majorana's exceptional qualities in the new circle of physicists which had in a few months grown up around Fermi, and at the same time he tried to persuade Ettore to follow his example, pointing out that the study of physics would be much more in line with his scientific aspirations and speculative gifts than that of engineering. Ettore Majorana took up physics at the beginning of 1928 after a talk with Fermi. A brief account of this talk will give a glimpse of Majorana's character.

He came to the Physics Institute in the Via Panisperna and was taken by Segré to Fermi's office, where Rasetti was also present.

This was the first time I saw him. From a distance he looked slender with a timid, almost hesitant, hearing; close to, one noticed his very black hair, dark skin, slightly hollow cheeks and extremely lively and sparkling eyes. Altogether he looked like a Saracen.

The discussion with Majorana soon turned to the research taking place at the Institute, and Fermi gave a broad outline of the model and showed Majorana reprints of his recent works on the subject, in particular the table showing the numerical values of the so-called Fermi universal potential.

Majorana listened with interest and, after having asked for some explanations, left without giving any indication of his thoughts or intentions. The next day, towards the end of the morning, he again came into Fermi's office and asked him without more ado to show him the table which he had seen for a few moments the day before. Holding this table in his hand, he took from his pocket a piece of paper on which he had worked out a similar table at home in the last twenty-four hours, transforming, as far as Segré remembers, the second-order Thomas-Fermi non-linear differential equation into a Riccati equation, which he had then integrated numerically. He compared the two tables and, having noted that they agreed, said that Fermi's table was correct: he then went out of the office and left the Institute. A few days later he switched over to physics and began to attend the Institute regularly.

Soon after taking up physics, Ettore Majorana impressed everyone with his lively mind, his insight and the range of his interests, which made him appear greatly superior to all his new companions. Being exceptionally penetrating and inexorable in his criticisms, he was nicknamed "the Great Inquisitor". In the same vein we called Fermi "the Pope", Rasetti "the Cardinal-Vicar" and so on⁽⁴⁾⁽⁵⁾.

His capacity for calculation was amazing. He not only did very complicated numerical calculations completely in his head but also in 20 or 30 seconds calculated definite integrals which were sufficiently complicated to require a considerable number of steps

⁽⁵⁾ L. FERMI. *Atoms in the Family*, the University of Chicago Press (1954); see also the Italian translation *Atomi in famiglia*, Mondadori (1954).

on the part of a clever mathematician: he also substituted algebraic or numerical limits and gave the final results directly.

In May and June 1928 while preparing for and sitting the university examinations, we had got into the habit of meeting before supper, between seven and eight in the evening, at the Casina delle Rose in the Villa Borghese. Besides Ettore Majorana, Giovanni Gentile junior, Emilio Segré and myself for the Physics Institute, there were Luciano Majorana, Giovanni Enriques, Giovanni Ferro-Luzzi and Gastone Piqué, all engineering students in the same year as Ettore. Sipping a drink or eating an ice-cream, we talked over the preparation of the examinations or the last examination we had sat, or one of the physicists in the group talked about some atomic physics results which he had recently heard about, more often than not from Fermi, or one of the engineering students discussed the properties of the electromagnetic field or one of its applications, or ran down the hydraulics professor, who was their *bête noire*. We also talked about literature. Ettore knew and appreciated the classics in general and preferred Shakespeare and Pirandello. We also talked of various cultural matters, a strong point with Ettore, and a bit about politics, but mostly about the Nobile expedition to the North Pole that had just taken place (March-May, 1928) and had given rise to the well-known sequence of events⁽⁶⁾.

Ettore's fellow engineering students often pulled his leg about his weakness in drawing: they described the scene when Ettore, during the projective geometry course, took a large sheet of paper and after some hours' work had traced on it his construction, which was quite in order from the point of view of principle, but extremely small and placed on the skew in a corner while the rest of the sheet remained untouched. Ettore listened to the accounts of this by his friends with a slightly amused air as though it had nothing to do with him, and at the end made some subtle and witty comment on the whole story and the account which had been given of it.

Ettore Majorana, Gabriello Giannini, who afterwards had a successful career as an electronic designer and manufacturer in the United States, and I, received our doctorate on the same day, 6 July, 1929. Ettore presented a thesis entitled "Sulla meccanica dei nuclei radioattivi" for which Fermi acted as sponsor, and he obtained 110/110 with distinction⁽⁷⁾. Even some 40 years later it is striking to read his thesis for the clear way

⁽⁶⁾ In the second expedition to the North Pole with an airship, organized and led by U. Nobile (in the first, which had taken place in 1926 under the leadership of R. Amundsen, Nobile had piloted the airship), while returning from the second flight over the Pole, the airship "Italia" crashed on to the ice, leaving some castaways. As a result, 8 members of the expedition died, in addition to 6 people who tried to go to the aid of the stranded men; among these was R. Amundsen.

⁽⁷⁾ The certificate of his Doctorate in Physics released on 15 May, 1964, by the University of Rome, shows the following marks: Algebra: 30; Analytical and Projective Geometry; 30, distinction; Applied Chemistry: 27; Dynamics: 30, distinction; Engineering Drawing: 18, (minimum for a pass); Probability Calculus: 27; Descriptive Geometry: 30; Physics: 30; Advanced Physics: 30, distinction; Geophysics: 30, distinction; Physics Laboratory: 30; Mathematical Physics; 30, distinction.

in which the problems relating to the structure of the nucleus and the theory of its alpha decay are set out and investigated.

After receiving his doctorate, Ettore continued to attend the Institute, where he more or less regularly spent two hours every morning, from 10.30 or 11 a.m. to 12.30 or 1 p.m., and a few hours in the afternoon from 5 to 7.30 p.m.

He spent his time in the library, where he mainly studied the works of Dirac, Heisenberg, Pauli, Weyl and Wigner.

The last two authors were perhaps the only ones for whom he expressed unqualified admiration. This was due, at least to a large extent, to his particularly lively, almost prophetic, interest in group theory and its application to physics. On many occasions during this period Majorana expressed the intention of writing a book on this subject; Segré even believes that he heard him say that he had already written one chapter of it.

The judgments he passed on living scientists, even of the first rank, were nearly always exceedingly severe, so much so that one would be tempted to suspect him of quite exceptional conceit, were it not for the fact that he was highly critical of his own performance and voiced very harsh opinions about his own work; while his criticisms were toned down and even vanished completely in the case of his friends. Those who were close to him thus finally came to understand that this great severity was nothing more than a sign of his unsatisfied and tormented spirit. His apparent isolation from his fellows, not only in everyday life but also in his emotions, concealed a great sensitivity which led him to form very few friendships: when he did, however, his friendship had the depth which is characteristic of his native land.

He struck up a close friendship with me and an even closer one with Giovanni Gentile junior (1906-1942)⁽⁸⁾. The latter had obtained his doctorate in physics at Pisa in November, 1927, and soon after had been appointed lecturer at the Physics Institute of the University of Rome, where he spent about six months of the academic year 1927-1928. It was during this time that he met and became friendly with Ettore, in collaboration with whom he later wrote his paper on the splitting of Roentgen terms (No. 1) [Corresponding to No. 1a in this volume].

Fostered by an interest in similar subjects in their early research work, the friendship between Ettore Majorana and Giovanni Gentile junior was also based on their common Sicilian origin and consequently on closely comparable family backgrounds.

On 12 November, 1932, he obtained his university teaching diploma in theoretical physics^(*): he presented only five papers, but the board, composed of Enrico Fermi, Antonino Lo Surdo and Enrico Persico, was unanimous in recognizing that the candidate had “a complete mastery of theoretical physics”⁽⁹⁾.

⁽⁸⁾ G. POLVANI, *Giovanni Gentile junior*, “Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere”, **75**, fasc. 11 (1941-42); C. SALVETTI, *Giovanni Gentile junior*, “Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano”, **16** (1942).

^(*) He thus became “libero docente”, equivalent to the English “university teaching qualification”.

⁽⁹⁾ The report of the Board of Examiners for the university teaching diploma in theoretical

From the point of view of scientific production these years represent the first of the two phases of Ettore Majorana's regrettably short life as a researcher.

This first phase includes his papers Nos. 1 to 6, which all deal with problems of atomic and molecular physics: the second phase, represented by papers Nos. 7, 8 and 9, on the other hand, concerns nuclear physics problems or the properties of elementary particles.

The papers belonging to the first phase can be subdivided into three groups. The first consists of Nos. 1, 3 and 5 and concerns atomic spectroscopy: the second includes Nos. 2 and 4, which deal with questions relating to the chemical bond. Finally, the third group consists of No. 6 only, on the problem of non-adiabatic spin-flip in a beam of polarized atoms.

Paper No. 1, written in collaboration with Giovanni Gentile junior, concerns the splitting, induced by the electron spin, of the $3M$ Roentgen terms of gadolinium ($Z = 64$) and uranium ($Z = 92$) and of the P optical terms of caesium ($Z = 55$), and the calculation of the intensity of the lines of caesium. They based their calculations on perturbation theory and used the eigenfunctions of the electrons in the states considered, which were obtained by the Thomas-Fermi method.

Paper No. 3 deals with the two lines which had recently been discovered in the helium spectrum and which could not be interpreted as a combination of known terms. P. G. Kruger, who had made this discovery, had proposed an interpretation whereby these two lines were due to transition from a normal state to two new "primed" states, namely states with two excited electrons which, being situated above the ionization energy of the helium atom, could produce transitions to states of the continuous spectrum, namely to spontaneous ionization processes. By means of an analysis based on the symmetry properties of the unperturbed eigenfunctions of the 16 states, which are obtained by combining two orbitals having a total quantum number of 2, and of perturbation calculations taken to second order terms, Ettore Majorana succeeded in confirming the interpretation originally proposed for one of the two lines, and in ruling out the possibility of the other being due to the helium atom. In this paper it is very interesting to note the discussion of the symmetry properties of the various states with respect to electron-spin exchange (singlet and triplet states), spatial rotations (azimuthal or orbital angular momentum quantum number), axial rotations (magnetic quantum) and reflections with respect to the centre of force (parity).

Paper No. 5, the third and last of the papers on atomic spectroscopy, deals with the so-called incomplete P' triplet of calcium. As was the case for paper No. 3, the primed terms are terms with two excited electrons: now, in the calcium spectrum at that time five groups of spectral lines had been observed, each consisting of six lines, due to the combination of normal terms and terms which could be arranged in series whose limit corresponds to calcium ionized once but with the external electron in the $3d$ excited state instead of the $1s$ state, as is the case of normal series. Some of these terms corresponding

to configurations with two excited electrons are situated above the ionization potential and in spite of this are stable in that they do not give rise to appreciable spontaneous ionization. This stability, as Majorana pointed out, is due to the fact that in a non-relativistic approximation the terms concerned have symmetry characteristics which are such that transition to the continuous spectrum is strictly forbidden. However, the presence of the intrinsic magnetic moment of the electrons leads to slight instability, which can become appreciable only in exceptional circumstances. This is the case, as Majorana showed, for the $J-2$ component of the anomalous triplets of zinc, cadmium and mercury, while for calcium experience shows that this component is absent or at least very weak.

Turning from the papers on atomic spectroscopy to those on the chemical bond, it should be noted that it was through his close study of these problems that Majorana mastered Heitler and London's⁽¹⁰⁾ quantum-mechanical theory of the chemical bond, which was to be of great importance for his future research work. His thorough knowledge of the exchange mechanism of valence electrons, which forms the basis of the quantum-mechanical theory, of the homopolar chemical bond, was later to serve as the point of departure for the assumption that nuclear forces are exchange forces.

Paper No. 2 on the formation of the molecular ion of helium was prompted by spectroscopic observations, which had then recently been made and which had brought to light bands attributed to the molecular ion He_2^+ . By means of a first-approximation calculation, Majorana then found the equilibrium distance of the two nuclei in the He_2^+ ion, and obtained values for their oscillation frequency which agree very well with those found experimentally.

In paper No. 4, Majorana makes a detailed study of the characteristics of a rather deep and anomalous even singlet term (called X term), which had recently been observed in the spectrum of the hydrogen molecule and which had been interpreted as a primed term.

The last paper in the period of work on molecular and atomic physics problems is No. 6. This deals with the problem of deriving the probability of spin-flip of the atoms of a polarized vapour beam moving in a rapidly varying magnetic field.

If the magnetic field slowly changes direction, the orientation of the atom follows adiabatically the direction of the field; but what happens if the variation in the direction of the field is not adiabatic? In particular, what happens if the atom passes near to a point where the magnetic field is zero?

This problem was discussed in the early days of quantum mechanics by Darwin and by Landé⁽¹¹⁾; Stern, who a few years earlier with Gerlach had done the famous experiments on spatial quantization, undertook to make a quantitative check of the theoretical predictions of the transition probability in the non-adiabatic case. The problem can be described as follows: one has a quantized system (such as, for instance, an atom or a

⁽¹⁰⁾ W. HEITLER and F. LONDON, "Z. Physik", **44**, 455 (1927); F. LONDON, "Z. Physik", **46**, 455 (1927); **50**, 24 (1928); W. HEITLER, "Z. Physik", **46**, 47 (1927); **47**, 835 (1925); "Z. Physik", **31**, 185 (1930).

⁽¹¹⁾ C. G. DARWIN, "Proc. Roy. Soc. (London)", A **117**, 258 (1928); A. LANDÉ, "Naturwiss.", **17**, 634 (1929).

molecule) with a total angular momentum J and a magnetic quantum number m with respect to the direction of a magnetic field which is constant in time; the problem is to find out the final state or states of the system if the field begins to vary rapidly with time in value and direction, according to a certain vector function $\vec{H}(t)$.

In his paper Majorana shows that the total effect of a variable magnetic field $\vec{H}(t)$ on a particle with an angular momentum $J = 1/2$ and a given component m along the z axis, can be described as a sudden rotation by an angle α of the total angular momentum.

After the rotation of the angle α , the system is no longer in a state of well-defined spatial quantization, with respect to the original direction of the field, but should be described by means of a wave packet consisting of the superposition of $2J + 1$ states, each characterized by a different value of the magnetic quantum number m' and a corresponding probability amplitude. The problem was, in fact, tackled and solved by Majorana with extraordinary elegance and conciseness for the special case when $J = 1/2$; but, as he points out, the method can easily be extended to the general case of any J .

The above gives some idea of the high quality of these papers, but their class is even more evident after their careful study; they show a thorough knowledge of experimental data down to the smallest details and an ease which was quite unusual, particularly at that time, in using the symmetry properties of the states to simplify problems or choose the most suitable approximation for solving each problem quantitatively, this latter capacity being, no doubt, at least partly due to his exceptional gifts for calculation.

Majorana's interest in nuclear physics, which had already been evident in his thesis, was greatly strengthened by the appearance of the classical papers which were to lead to the discovery of the neutron at the beginning of 1932. His renewed interest was actually in tune with the new general orientation of the whole Institute in the Via Panisperna, where for some years there had been talk of the advisability of gradually abandoning atomic physics, the field in which everyone had worked for some years, and concentrating the main research effort on nuclear physics.

The first to publish the idea that the nucleus consisted solely of protons and neutrons was probably Iwanenko⁽¹²⁾. Neither I nor his other friends questioned whether Ettore Majorana came to this conclusion independently. What is certain is that before Easter of that year he tried to work out a theory on light nuclei, assuming that they consisted solely of protons and neutrons (or neutral protons as he then said) and that the former interacted with the latter through exchange forces. He also reached the conclusion that these exchange forces must act only on the space coordinates (and not on the spin) if one wanted the a particle, and not the deuteron, to be the system saturated with respect to binding energy.

He talked about this outline of a theory to his friends at the Institute, and Fermi, who had at once realized its interest, advised him to publish his results as soon as possible, even though they were partial. However, Ettore would not hear of this, because he considered his work to be incomplete.

⁽¹²⁾ D. IWANENKO, "Nature (London)", **129**, 798 (1932).

The issue of the "Zeitschrift für Physik" dated 19 July, 1932 contained Heisenberg's first paper⁽¹³⁾ on "Heisenberg exchange forces", namely forces involving the exchange of both the space and spin coordinates.

This paper made a great impression in the scientific world; it was the first attempt to put forward a theory of the nucleus which, although incomplete and imperfect, succeeded in overcoming some of the theoretical difficulties which had so far seemed insurmountable.

Fermi again tried to persuade Majorana to publish something, but all his efforts and those of his friends and colleagues were in vain. Finally, however, Fermi succeeded in persuading him to go abroad, first to Leipzig and then to Copenhagen, and obtained a grant from the National Research Council for his journey, which began at the end of January, 1933 and lasted six or seven months.

His aversion to publishing or making known his results in any way, which is evident from this episode, was part of his general attitude. Sometimes in the course of conversation with a colleague he would say, almost casually, that he had the previous evening made calculations or worked out the theory of a phenomenon which was not clear, and which had come to his or one of his friends' notice in the last few days. During the subsequent discussion, in which he was always very laconic, at a certain point Ettore would draw from his pocket the cigarette packet on which he had written in small but neat writing the main equations of his theory, or a table of numerical results. He copied on the blackboard the part of the results which was necessary for elucidating the problem and then, when the discussion was over and the last cigarette smoked, screwed up the packet and threw it into the waste paper basket.

Before leaving for Leipzig, Majorana published another paper, No. 7, on the "Relativistic Theory of Particles with Arbitrary Intrinsic Angular Momentum". This is his first paper dealing with elementary particles and not groups of particles like atoms and nuclei.

In January Majorana left for Leipzig, where he remained until the beginning of the summer: from Leipzig he went to Copenhagen, where he spent about three months, and from there back to Leipzig, where he stayed for about a month before finally returning to Italy at the beginning of the autumn in 1933.

In those days Leipzig was one of the major centres of modern physics; W. Heisenberg had gathered round him a group of exceptional young physicists including F. Bloch, F. Hund, R. Peierls and, among the visitors, E. Feenberg, D. R. Inglis and E. G. Uhlenbeck.

During this period Majorana became friendly with Heisenberg, for whom he always had a great admiration and a feeling of friendship. It was Heisenberg who persuaded him without difficulty by the sheer weight of his authority to publish his paper on nuclear theory, which appeared in the same year, both in the "Zeitschrift für Physik" (No. 8a) and in "La Ricerca Scientifica" (No. 8b).

When he returned to Rome in the autumn of 1933, Ettore was not in good health, because of gastritis which he had developed in Germany. It is not clear what caused this, but the family doctors attributed it to nervous exhaustion.

⁽¹³⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", **77**, 1 (1932).

He began to attend the Institute in the Via Panisperna only at intervals, and after some months no longer came at all: he tended more and more to spend his days at home immersed in study for a quite extraordinary number of hours.

His interest in philosophy, which had always been great, increased and prompted him to reflect deeply on the works of various philosophers, particularly Schopenhauer.

It was probably at this time that he wrote the paper on the value of statistical laws in physics and the social sciences which was found among his papers by his brother Luciano, and was published after his disappearance (No. 10) by Giovanni Gentile junior.

In addition to these old and new interests he found a new one in medicine, a subject which he perhaps tackled in order to understand the symptoms and significance of his illness.

The time had come for a new competition for a chair in theoretical physics. The first and only competition for chairs in this subject had been held in 1926, and had resulted in Enrico Fermi being appointed to the chair in Rome, and Enrico Persico to the one in Florence. The competition was advertised at the beginning of 1937 at the request of the University of Palermo, followed upon a request from Segré, who in the meantime had become Professor of Experimental Physics there.

The problem naturally was to make Ettore enter the competition, since he did not seem to want to do so, and in any event had not published any physics papers for some years. Fermi and various friends tried to persuade him, and finally Majorana was convinced that he should take part in the examination, and he sent his paper on the Symmetrical theory of electrons and positrons (No. 9) for publication in "Il Nuovo Cimento".

From the analysis of the various Majorana papers, there naturally arises the difficult problem of trying to evaluate his general stature as a scientist, in so far as this is possible. There is no doubt that he had an extraordinary gift for mathematics, an exceptionally keen analytical mind, and a most acute critical sense. Perhaps it was this highly developed critical sense, together with a certain lack of balance on the human side, that interfered with his capacity for creative synthesis and prevented him from reaching a level of scientific productivity comparable with that reached at the same age by the major contemporary physicists. This does not alter the fact that the choice of some of the problems which he tackled and the methods which he used and, more generally speaking, the choice of the mathematical means of dealing with them, showed a natural tendency to be ahead of his time which, in some cases, was almost prophetic.

The Board of Examiners for the competition for the Chair in theoretical physics at the University of Palermo was made up as follows: Antonio Carrelli, Enrico Fermi, Orazio Lazzarino, Enrico Persico and Giovanni Polvani. The board first met in October, 1937, but it was soon invited by the Ministry of National Education to suspend its work for the purpose of granting a request by Senator Giovanni Gentile to appoint (according to the terms of Article 8 of the R.D.L., 20 June, 1935, n. 1071) the candidate Ettore Majorana as ordinary Professor of Theoretical Physics in the Royal University of Naples. The above article referred to special merit; it had been introduced a few years earlier for the purpose of allowing Guglielmo Marconi to be appointed Professor of Electromagnetic Wave Theory at the University of Rome without competing for the Chair.

Having been appointed Professor of Theoretical Physics at Naples in November, 1937, Ettore Majorana moved to that city at the beginning of January the following year, and lodged at first at the Albergo Patria and then at the Albergo Bologna which overlooked the Via de Pretis, a very busy street.

In Naples he struck up a friendship with Antonio Carrelli, Professor of Experimental Physics and Director of the Physics Institute of that University.

In a letter to his mother dated 11 January, 1938, he told her that he was to begin his lectures two days later, on Thursday 13 at 9 a.m., and that he had succeeded in making the opening of the course completely informal; he added "This is another reason why I don't advise you to come." Later in the letter he wrote "I found a letter from the Rector which had been waiting for me for two months, in which he informed me of my appointment on account of my well-known and exceptional talent, and since I could not get in touch with him I wrote him a letter in an equally stilted style." For anyone who knew him personally, this phrase was full of light and graceful irony directed at the law containing that phrase, at the Rector, but above all at himself. The rest of the letter is in the same vein, when he talks about the Physics Institute in Naples, some colleagues whom he mentions in a friendly way, and their assistants.

At the same time, this letter shows clearly his warm affection for and strong attachment to his mother and brothers.

It should also be said, incidentally, that in spite of his plain neglect of religious observance and his extreme reserve on subjects of this kind, everything points to the fact that his early education had left him with an essentially religious turn of mind.

In Naples, as in Rome, he led an extremely sheltered life; in the morning when he had a lecture to give he went to the Institute, and in the late afternoon he went for long walks in the busiest parts of the city.

In Naples, as in Rome in earlier years, Majorana was tormented by his illness, which finally inevitably had an effect on his temper and even on his character. This perhaps explains the excessive disappointment which he felt, according to Carrelli, when, after a few months' teaching, he realized that very few of the students were capable of following and appreciating his lectures, which were always on a very high level.

On 26 March, 1938, Carrelli was most astonished to receive from Ettore Majorana a telegram from Palermo, in which he told him not to worry about what he had said in the letter he had sent. The letter was unfortunately lost, but one sentence which remained fixed in Carrelli's mind, ran more or less as follows: "I am not a young girl from one of Ibsens plays, you understand, the problem is much greater than that." The letter ended with warm greetings to Carrelli and thanks for the friendship which he had shown him in the last few months.

Carrelli, upset by this letter, at once rang up Fermi, who got in touch with Ettore's brother Luciano in Rome: the latter immediately went to Naples, where he began feverishly to search for information about Ettore. The enquiries made in Palermo and Naples revealed that Ettore had left Naples for Palermo on the steamer of the Società Tirrenia in the night of 23 March, and had arrived in Palermo where he had spent a couple of days and from where, on the 25th, he had sent both the letter and the telegram to Car-

relli. On the evening of the same day, he had boarded the steamer for Naples. Professor Michele Strazzeri of the University of Palermo saw him that night on board and in fact just as dawn was breaking, and the steamer was entering the Bay of Naples, he saw him sleeping in his cabin. A sailor said that he had seen him a stern after passing Capri and not long before the ship berthed in Naples.

The enquiry was continued for a further three months by both the police and the carabinieri, and Mussolini took a personal interest in it; Ettore's mother had written to him enclosing a letter from Fermi, in which, among other things, he said⁽¹³⁾: "I have no hesitation in saying, and it is no way an exaggeration, that of all the Italian and foreign scholars whom I have had the opportunity of knowing, Majorana is the one whose depth most impressed me. Capable of developing boldly hypotheses and, at the same time of criticising his own work and that of others, highly skilled in calculation and a mathematician of great depth, who never lost sight of the true nature of the physics problems behind the veil of figures and mathematical techniques, Ettore Majorana was highly endowed with that rare combination of gifts which go to make a typical theoretician of the first rank."

The family offered a reward of 30,000 lire, a considerable sum at the time, to anybody who could give news of Ettore and for months published in the leading newspapers an appeal to Ettore to return home: the Vatican tried to find out whether he had entered a monastery. However, all these attempts were fruitless. No trace was ever found: it was only discovered that a few days before Ettore Majorana left for Palermo, a young man who appeared very upset and whose somatic and mental characteristics seemed to his family to correspond to those of Ettore, went to the "Chiesa del Gesù Nuovo" in Naples near the Albergo Bologna. Moreover, Father de Francesco, ex-Father Provincial

⁽¹³⁾ This letter from Fermi, of which there remains a hand-written copy made by Luciano Majorana before it was sent to Mussolini, is written in a very different style from Fermi's usual one. This may possibly be partly due to the dramatic circumstances in which it was written and partly to the fact that he was writing to Mussolini.

Fermi's opinion of Ettore Majorana, was, however, expressed on various other occasions and particularly in a conversation which he had with Giuseppe Cocconi during the days following Ettore's disappearance and about which Cocconi himself at my request sent me a letter dated 18 July, 1965. Soon after taking his doctorate at the end of 1937 in Milan, G. Cocconi had come to Rome and in January 1938 had begun to work with E. Fermi and G. Bernardini on the products of meson decay in cosmic radiation.

He thus had the opportunity of seeing Majorana once when he had come to the Institute to see Fermi, and then he had been present, in the dramatic days after Ettore's disappearance, during some of Fermi's various telephone calls and conversations.

It was at this time that Fermi said something to Cocconi which ran more or less as follows: "Because, you see, there are various kinds of scientists in the world; the second and third-rate ones who do their best but do not get very far. There are also first-rate men who make very important discoveries which are of capital importance for the development of science. Then there are the geniuses like Galileo and Newton. Well, Ettore Majorana was one of these. Majorana had greater gifts than anyone else in the world; unfortunately he lacked one quality which other men generally have: plain common sense".

of the Jesuits, who received the young man, thought that he recognized him from the photograph of Ettore shown to him by the family.

The young man asked Father de Francesco if he could “try the religious life”, an expression which according to the brothers should be understood as “go into retreat”. On receiving the reply that they would willingly offer him hospitality, but only for a short time—since, if it was to be a final decision it would be necessary, according to the rules of the Order, to enter the Novitiate—the young man replied; “Thank you. Excuse me”, and left.

The most likely assumption for his friends was that he had thrown himself into the sea: but all the experts on the waters of the Bay of Naples maintain that the sea would sooner or later have washed up his body.

Nothing further was discovered: all his friends and relatives felt a sense of deep sorrow at the loss of this man who was gentle, reserved and averse to outward show, so deeply affectionate although profoundly unhappy; a sense of frustration for all that his mind had not produced but would certainly have produced if it had not been for his absurd disappearance; and above all a sense of deep admiration and astonishment at this man and thinker who passed among us so rapidly, like a character from Pirandello, laden with problems which he bore alone; a man who succeeded admirably in finding the answer to some of nature’s problems, but who sought in vain for the meaning of life, his own life, even though it was infinitely richer in promise than that of the great majority of other men.

EDOARDO AMALDI
Rome, 1966

Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio^(*)

NOTA DI G. GENTILE e E. MAJORANA

“Rendiconti dell'Accademia dei Lincei”, vol. 8, 1928, pp. 229-233.

1. Vogliamo mostrare in questa Nota che il potenziale di FERMI non solo permette una buona determinazione *a priori* di tutti i livelli energetici degli atomi pesanti; ma permette anche di calcolare con grande esattezza, dato il carattere statistico di questa teoria dell'atomo, lo sdoppiamento dei termini; cosa tanto più importante quando si pensi che a questi sdoppiamenti non erano applicabili le formule relativistiche di SOMMERFELD, uscendo questo fenomeno fuori dagli schemi della teoria della struttura fine. Infatti si sa che bisogna ricorrere all'ipotesi dell'elettrone rotante, ipotesi che del resto ha perso ogni carattere ipotetico e appare oggi come fondata su solide basi teoriche, dopo l'ultimo lavoro di DIRAC⁽¹⁾. I nostri calcoli si riferiscono per i livelli Roentgen al termine 3M del gadolino ($Z = 64$) e dell'uranio ($Z = 92$) e per i termini ottici ai termini P del cesio ($Z = 55$).

Il potenziale elettrostatico nell'interno d'un atomo di numero Z si può porre sotto la forma: $V = \frac{Ze}{r} \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right)$ dove φ è una funzione numerica in genere minor d'uno, che tien conto dell'azione di schermo delle altre cariche elettroniche. Precisamente in prossimità del nucleo ove questa azione è minima $\varphi = 1$, inoltre per r crescente φ diminuisce finché, per $r = \infty$ e per atomi neutri, $\varphi = 0$.

Evidentemente i valori di φ dipendono dalla distribuzione media locale degli elettroni intorno al nucleo. Di questa nuvola di elettroni si sa inoltre questo: che obbedisce al principio di PAULI. Quindi la statistica di FERMI applicata a questo speciale gas

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 Luglio 1928; presentata dal socio O. M. Corbino

(1) DIRAC, “Proc. Roy. Soc. (London)”, *A* 117, 610; 118, 351 (1928).

degenere fornisce un'ulteriore relazione fra potenziale e densità elettrica. Scrivendo allora l'equazione di POISSON, FERMI⁽²⁾ arriva all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}} \text{ in cui: } x = \frac{r}{\mu}; \quad \mu = \frac{3^{2/3}h^2}{2^{13/3}\pi^{4/3}me^2Z^{1/3}}.$$

Se si fissa l'attenzione su di un determinato elettrone si può in prima approssimazione ritenere⁽³⁾ che gli altri $Z - 1$ siano distribuiti come in un atomo neutro di numero $Z - 1$ e quindi scrivere il potenziale a cui esso è soggetto: $V = \frac{e}{r}[1 + (Z - 1)\varphi(\frac{r}{\mu})]$; naturalmente così si trascurano, nel caso di un elettrone interno, sopra tutto le conseguenze del principio di PAULI, che non è un principio statistico ma un rigoroso principio di esclusione, e nel caso di un elettrone esterno la polarizzazione che nasce nel resto atomico. Tuttavia nel primo caso l'errore è minimo e nel secondo esistono incertezze di più grave importanza dovute all'esistenza del sistema periodico che si manifesta con regolari oscillazioni di tutte le proprietà atomiche superficiali intorno a un andamento medio; il solo perseguibile con mezzi statistici.

2. L'equazione di SCHRÖDINGER si scriverà in generale(*):

$$\Delta_2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r}(Z - 1)\varphi \right] \psi = 0.$$

Se k è il quanto azimutale, ψ si spezza in una funzione sferica di ordine k e in una funzione del raggio che conviene mettere sotto la forma χ/r ; la χ obbedisce allora all'equazione:

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \left[\frac{k(k+1)}{x^2} - a \frac{1 + (Z-1)\varphi}{x} + \varepsilon \right] \chi$$

essendo:

$$a = \frac{8\pi^2m}{h^2}e^2\mu; \quad \varepsilon = -\frac{8\pi^2m}{h^2}\mu^2E;$$

l'integrazione numerica per i tentativi è semplice nel caso di quanto radiale 1 (nessun nodo nella χ) (Tavola I(**)). In prossimità dello zero ci siamo serviti dello sviluppo in serie della φ .

Per il termine $3d$ del gadolino, $\varepsilon = 4,29$ e quindi il termine espresso in RYDBERG risulta: $-E = 86,3$, in esatto accordo con l'esperienza (86,6) ove si tenga conto della correzione relativistica che abbassa il termine semplice in maniera che risulti la sua distanza dal termine più basso precisamente la metà della distanza fra i termini effettivi.

(²) FERMI, "Z. Physik", 48, 73 (1928).

(³) FERMI, "Rend. Acc. Lincei", 7, 726 (1928).

(*) Δ_2 è la notazione usata in originale che non corrisponde alla notazione usata attualmente.

(Nota del Curatore.)

(**) Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*

Lo sdoppiamento in una teoria semplificata si calcolerebbe in base all'energia mutua fra il momento magnetico dell'elettrone e il valor medio del campo magnetico virtuale in cui esso viene a trovarsi.

La teoria di DIRAC dà in prima approssimazione:

$$\Delta E = \frac{5}{2} \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\int \psi \bar{\psi} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} dS}{mc^2}.$$

Per il gadolino si trova: $\Delta E = 2,20 \text{ R}$, in buon accordo con l'esperienza (2,4 R).

Il calcolo ripetuto per lo stesso termine dell'uranio dà: $-E = 258 \text{ R}$ (anche questa volta in piena armonia con il valore sperimentale 255) e $\Delta E = 11,7$ invece di 12,96.

3. Il calcolo del termine $6p$ del cesio, perfettamente analogo al precedente, conduce all'autofunzione di cui riportiamo i valori numerici (Tavola II(*)). Si trova per il valore del termine:

$$n = 24600 \text{ cm}^{-1}$$

di fronte al doppietto sperimentale:

$$n_1 = 19674$$

$$n_2 = 20228;$$

lo sdoppiamento calcolato secondo la formula ricordata più sopra con il coefficiente corrispondente al diverso quanto azimutale risulta:

$$\Delta n = 1020 \text{ cm}^{-1}$$

invece del valore sperimentale:

$$\Delta n = 554 \text{ cm}^{-1}.$$

Le divergenze fra teoria e esperienza si spiegano perfettamente entro l'ambito delle approssimazioni statistiche, fra le quali ha massima importanza quella che dipende dal posto che l'elemento occupa nel sistema periodico. Precisamente essendo il cesio un metallo alcalino, il resto atomico ha la struttura compatta dei gas nobili, di modo che la carica efficace, per l'elettrone luminoso tende a 1 con particolare rapidità. Né deve sorprendere che per lo sdoppiamento si manifesti uno scarto tanto più forte che per l'energia. Per comprenderne intuitivamente la ragione basta riferirsi al modello classico di BOHR-SOMMERFELD; si vede allora facilmente che tutte le orbite molto allungate e di uguale quanto azimutale hanno approssimativamente la stessa distanza perielica e in vicinanza del nucleo si confondono in una unica curva percorsa con la stessa legge oraria. Ora è essenzialmente in questa zona che ha origine lo sdoppiamento; segue che

(*) Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*

esso è all'incirca inversamente proporzionale al periodo di rivoluzione (intervallo fra due passaggi al perielio). Se la non newtonianità del campo si manifesta fortemente, come nel nostro caso, già a non grande distanza dall'afelio, un allungamento anche modesto dell'orbita determina una variazione considerevolissima del periodo di rivoluzione⁽⁴⁾. Del resto un calcolo diretto mostra che la nostra interpretazione è fondata. Supponiamo di correggere il potenziale statistico in guisa che il valore dei termini si accordi con quello sperimentale. Ciò può farsi in infiniti modi; tuttavia una limitazione si impone, e cioè che il potenziale corretto sia sempre intermedio fra quello statistico e quello newtoniano limite. Si trova allora che esiste un limite superiore per lo sdoppiamento calcolato in base all'autofunzione corrispondente, il quale vale:

$$\Delta_s n = 750 \text{ cm}^{-1};$$

esso corrisponde al passaggio brusco dal potenziale statistico a quello newtoniano a una distanza di circa $2,2 \text{ \AA}$ dal nucleo. Con un raccordo più verosimile fra potenziale statistico e newtoniano del tipo:

$$\frac{v_s - v}{v_s - v_n} = e^{-k\varphi}$$

si trova un valore in quasi perfetto accordo con l'esperienza.

Abbiamo infine calcolato il rapporto fra le intensità delle prime due righe di assorbimento. Se si indica con ψ_0 l'autofunzione corrispondente al termine fondamentale $6s$ e con ψ'_1 e ψ''_1 quelle corrispondenti ai termini $6p$ e $7p$, tale rapporto vale:

$$\frac{i_1}{i_2} = \left[\frac{\int \psi_0 \bar{\psi}'_1 x^3 dx}{\int \psi_1 \bar{\psi}''_1 x^3 dx} \right]^2.$$

Le autofunzioni (Tavola III^(*)) sono state determinate conservando il potenziale statistico^(**) fino a $r = 2,2 \text{ \AA}$ e il potenziale newtoniano a distanza maggiore. In queste condizioni, come si è detto, si ottiene per il termine $6p$ il valore sperimentale; è notevole che nelle stesse condizioni anche il valore teorico del termine $7p$ si accordi presso che esattamente con l'esperienza. Per ragioni di semplicità non si è determinato teoricamente il termine $6s$; l'autofunzione ψ_0 è stata invece costruita dall'infinito e fino a non grande

⁽⁴⁾ In generale, per livelli non eccitati o per livelli eccitati di debole quanto azimutale, si ha nel modello classico un ordinario moto a rosetta. Al contrario, per taluni livelli eccitati di forte quanto azimutale, l'orbita di BOHR-SOMMERFELD si spezza in due distinte, di cui l'una si svolge nella zona profonda dell'atomo, l'altra nella regione più esterna. Il modello cessa allora di dare indicazioni intuitive.

^(*) Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*

^(**) Nei "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei" è stampato "statico" ma nel manoscritto figura chiaramente "statistico". (Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*)

distanza dal nucleo, in base al valore sperimentale del termine. Le χ non normalizzate sono riportate nella tabella. Si trova:

$$\frac{i_1}{i_2} = 125.$$

Lo sdoppiamento del termine $7p$ calcolato in base all'autofunzione ψ_1'' risulta:

$$\Delta_s n = 220 \text{ cm}^{-1}$$

e deve considerarsi come un limite superiore. L'esperienza dà:

$$\Delta n = 181$$

in accordo questa volta assai migliore, per ragioni facili a comprendersi.

Tavola I			Tavola II		Tavola III			
x	χ_{64}	χ_{92}	x	$\chi_{55}^{(*)}$	x	χ_0	χ_1'	χ_1''
0,2	0,174	2,138	0	0	4	-0,091	-0,038	-0,039
0,4	0,603	6,840	0,1	0,0519	5	-0,390	-0,269	-0,270
0,6	0,925	8,265	0,2	0,1030	6	-0,513	-3,099	-0,399
0,8	1,031	7,231	0,4	0,0627	7	-0,477	-0,426	-0,425
1,0	0,976	5,482	0,6	-0,0593	8	-0,336	-0,376	-0,373
1,2	0,838	3,739	0,8	-0,1442	9	-0,141	-0,276	-0,270
1,4	0,675	2,396	1	-0,1587	10	0,072	-0,147	-0,139
1,6	0,521	1,515	1,5	0,0019	11	0,279	-0,007	0,044
1,8	0,389	0,940	2	0,1831	12	0,466	0,134	0,147
2,0	0,284	0,570	3	0,2024	14	0,757	0,391	0,406
			4	-0,0374	16	0,931	0,596	0,601
			6	-0,3990	18	1,000	0,740	0,723
			8	-0,3764	20	1,005	0,840	0,788
			10	-0,1508	25	0,898	0,967	0,781
			12	0,1276	30	0,717	0,962	0,571
			16	0,5942	35	0,535	0,876	0,234
			20	0,8503	40	0,377	0,749	-0,154
			25	0,9281	50	0,171	0,484	-0,820
			30	0,8474	60	0,071	0,282	-1,227
			35	0,7012	70	0,027	0,153	-1,326
			40	0,5462	80	0,010	0,079	-1,221
			50	0,2990	100	0,001	0,019	-0,791

(*) L'indice 55 è una nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*

Commento alla Nota Scientifica n. 1a: “Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen ed ottici a causa dell’elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio”.

La prima pubblicazione scientifica di Ettore Majorana, presentata alla seduta dell’Accademia dei Lincei e pubblicato nei rendiconti dell’Accademia stessa nel 1928 è il risultato di una collaborazione con Giovanni Gentile jr, assistente di Enrico Fermi. Majorana era ancora uno studente del Corso di Laurea in Fisica e la sua tesi in Fisica sotto la direzione di E. Fermi viene discussa nel 1929. Il lavoro di Gentile e Majorana (indicato nel seguito per brevità come G&M) rappresenta un’applicazione ad un problema di spettroscopia atomica del metodo statistico per calcoli di strutture atomiche introdotto da Fermi in una serie di pubblicazioni fra il 1927 ed il 1928⁽¹⁾. Quella costruzione teorica è oggi ben nota come “modello di Thomas-Fermi”. Infatti, lo stesso metodo matematico fu sviluppato in contemporanea ed in maniera indipendente da L. H. Thomas dell’Università di Cambridge⁽²⁾. Questo modello semplifica considerevolmente il problema complesso del calcolo delle strutture atomiche per il caso di atomi con molti elettroni. In questo caso è necessario determinare il moto di ciascun elettrone sotto l’influenza dell’interazione coulombiana del nucleo e della repulsione degli altri elettroni. Nel modello di Thomas-Fermi il problema è semplificato attraverso l’uso di un potenziale effettivo centrale che approssima l’azione di tutti gli altri elettroni su quello d’interesse. Dato il numero elevato di elettroni, il potenziale è calcolato con un metodo statistico, trattando quindi gli elettroni come un gas di cariche che circonda il nucleo. Il metodo statistico di Fermi per il calcolo del potenziale effettivo è brevemente presentato alla pagina 4, in alto, dove la funzione φ che compare nel potenziale è derivata dalla densità di carica dei rimanenti elettroni attraverso l’uso dell’equazione di Poisson. Il potenziale effettivo viene inserito nell’equazione di Schrödinger, riportata al centro di pagina 4, la cui soluzione determina le autofunzioni e le autoenergie per le orbite dell’elettrone.

Fermi aveva applicato il metodo statistico alla derivazione delle energie di ionizzazione per diverse specie atomiche, ottenendo un buon accordo fra le previsioni teoriche ed i risultati sperimentali allora conosciuti. G&M applicano il metodo statistico al calcolo dell’energia di ionizzazione per un elettrone nell’orbitale $3d$ degli atomi di gadolinio ed uranio. G&M determinano inoltre lo splittamento di struttura fine dovuta all’interazione

⁽¹⁾ E. FERMI, *Rend. Lincei* **6** (1927) 602; **7** (1928) 342, 726; *Z. Phys.* **48** (1928) 73; **49** (1928) 550.

⁽²⁾ L. H. THOMAS, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **23** (1927) 542.

spin-orbita per elettroni degli stessi orbitali ed anche per l'orbitale $6p$ del cesio. Per il caso di gadolinio ed uranio i livelli atomici sono qui indicati come termini Roentgen; oggi la denominazione usata è quella di transizioni a raggi X poiché corrispondono alla produzione di radiazione elettromagnetica in quella banda dello spettro.

Dal punto di vista classico, la separazione di struttura fine è prodotta dall'interazione fra il momento magnetico associato al momento angolare intrinseco dell'elettrone (l'elettrone rotante citato nel titolo dell'articolo ed introdotto nel 1925 da G. E. Uhlenbeck e S. Goudsmit⁽³⁾) ed il campo magnetico prodotto dalla rotazione dell'elettrone attorno al nucleo. Invece, G&M derivano lo sdoppiamento di struttura fine a partire dalla teoria della meccanica quantistica sviluppata da P. A. M. Dirac e pubblicata nello stesso anno 1928, come nel riferimento (1) del lavoro di G&M. La prima equazione a pagina 5 è derivata dalla teoria di Dirac e corrisponde all'utilizzo della teoria delle perturbazioni al primo ordine per determinare la separazione fine dei livelli atomici. In tale equazione il potenziale dentro l'integrale al secondo membro è definito come v invece di V come nell'articolo di Dirac e nella definizione del potenziale a pagina 4, sesta riga. La quantità v non è definita nell'articolo, ma Fermi ha usato tale simbolo per indicare una quantità che differisce dal potenziale per una costante, quindi per il risultato del calcolo della separazione di struttura fine l'uso di v o di V è equivalente. Il risultato importante della formula scritta da G&M è che per la determinazione della separazione di struttura fine il potenziale effettivo statistico del modello di Thomas-Fermi deve essere utilizzato. Il contributo più importante a tale separazione proviene dalla parte della funzione d'onda dell'elettrone vicino al nucleo, nella regione spaziale dove il potenziale effettivo si riduce al potenziale Coulombiano non schermato dagli elettroni dell'atomo.

Per i potenziali di ionizzazione del livello $3D$ di gadolinio ed uranio l'analisi teorica riproduce i risultati sperimentali entro alcune parti percentuali e la separazione di struttura fine entro il 20%. Invece per i calcoli sull'atomo di cesio l'accordo fra teoria ed esperimento è di peggiore qualità, del 20% per la ionizzazione dello stato $6P$ e solo del 50% per la separazione di struttura fine di tale stato. Gli autori affermano che la ragione per la differenza fra tali atomi è che per il cesio il potenziale effettivo presenta una forte variazione spaziale nella regione vicino al nucleo dove passa da quello non schermato ad uno schermato. Inoltre, poiché diverse autofunzioni dell'elettrone esterno hanno una simile dipendenza spaziale, la teoria delle perturbazioni al primo ordine non possiede la precisione richiesta per riprodurre i risultati sperimentali.

A questo punto per l'analisi dei dati del cesio gli autori sviluppano un brillante metodo, diventato tipico di fisica atomica: G&M modificano il potenziale effettivo del cesio al fine di ottenere un buon accordo con i dati della struttura fine. Più precisamente, gli autori introducono un nuovo potenziale, come descritto dalla seconda equazione a pagina 6, che rappresenta un adattamento fra il potenziale coulombiano e quello statistico. Usando tale potenziale gli autori affermano di potere riprodurre quasi perfettamente il valore

⁽³⁾ G. E. UHLENBECK e S. GOUDSMIT, *Naturwiss.* **13** (1925) 953; *Nature (London)* **117** (1926) 264.

sperimentale per le strutture fini dei livelli $6P$ e $7P$.

La bontà di tale accordo spinge G&M ad utilizzare le autofunzioni elettroniche determinate forzando il potenziale effettivo. Pertanto gli autori derivano il rapporto fra le probabilità di transizione per le transizioni ottiche dallo stato fondamentale $6S$ ai due stati superiori $6P$ e $7P$. L'articolo non discute il paragone con risultati sperimentali, ma il valore di tale rapporto è entro il 5% in accordo con quello ora conosciuto. L'interesse nel calcolo delle forze dell'oscillatore per transizioni ottiche si collega alle misure spettroscopiche effettuate a Pisa nel Laboratorio di L. Puccianti, dove E. Fermi aveva fatto la sua tesi di laurea in fisica, ed a quelle effettuate in seguito a Firenze da E. Fermi e F. Rasetti. Lo stesso Fermi in una pubblicazione del 1930⁽⁴⁾, un capolavoro della spettroscopia atomica, esamina il rapporto di probabilità di transizioni ottiche, per spiegare il rapporto anomalo misurato da Rasetti per le componenti dal doppietto $6P$ allo stato fondamentale $6S$ del cesio. Per compiere tale analisi Fermi utilizza i risultati numerici derivati da G&M per il rapporto $6P/7P$.

Fermi presentò i risultati ottenuti da G&M ad una conferenza su invito organizzata a Lipsia nel 1928 con P. Debye presidente del Comitato Organizzatore. Come riportato da F. Rasetti nel volume che raccoglie tutte le pubblicazioni di E. Fermi, questo invito a presentare ad un'udienza internazionale accuratamente selezionata i risultati della ricerca effettuata a Roma, fu considerato da Fermi come un grande onore. Fermi scelse di presentare una rassegna del modello statistico dell'atomo e delle applicazioni di tale modello ottenute da lui stesso e dai suoi collaboratori. Infatti il sommario della presentazione di Fermi, pubblicato a Lipsia⁽⁵⁾ nello stesso anno della conferenza, discute i risultati di G&M sulle separazioni di struttura fine e sul rapporto delle intensità delle transizioni ottiche.

L'articolo di G&M ha ricevuto un numero limitato di citazioni, oltre a quelle già riportate in pubblicazioni di Fermi. Tuttavia nel 1933, T. Y. Wu che stava preparando la sua tesi di Dottorato all'Università del Michigan sotto la direzione di S. Goudsmit sulla teoria di difetti quantistici per gli atomi pesanti, paragona i suoi risultati a quelli ottenuti da G&M⁽⁶⁾. Ancora nel 1997 P. S. Lee e T.-Y. Wu⁽⁷⁾ riesaminano il modello statistico di Thomas-Fermi per atomi neutri ed ottengono una approssimazione migliore per il potenziale effettivo, che gli autori affermano produce una più elevata precisione nelle analisi numeriche come quelle di G&M.

ENNIO ARIMONDO
NIST, Gaithersburg, MD (USA)

⁽⁴⁾ E. FERMI, *Z. Phys.* **59** (1930) 680.

⁽⁵⁾ E. FERMI, in *Quantentheorie und Chemie*, a cura di H. Falkenhagen (Leipzig) 1928; riprodotto in *Collected Papers*, Vol. 1 (The University of Chicago Press) 1961.

⁽⁶⁾ T.-Y. WU, *Phys. Rev.* **44** (1933) 727.

⁽⁷⁾ P. S. LEE e T.-Y. WU, *Chin. J. Phys.* **35** (1997) 742.

On the splitting of the Roentgen and optical terms caused by the electron rotation and on the intensity of the cesium lines^(*)^(**)

G. GENTILE and E. MAJORANA

1. The purpose of this paper is to show that FERMI's potential allows one to determine *a priori* and with very good approximation all the energy levels of heavy atoms. This also allows one to calculate with remarkable accuracy, considering its statistical character, the splitting of the various terms. This is of great importance considering that one could not apply SOMMERFELD's relativistic formula to these splittings, as the phenomenon goes well beyond the scheme of the fine-structure theory. Indeed it is well known that one has to use the assumption of the rotating electron which by now has lost its hypothetical character and appears to be well founded on a solid theoretical basis as DIRAC's last paper⁽¹⁾ has shown. Our calculations will be applied to the Roentgen levels of the 3M term of gadolinium ($Z = 64$) and of uranium ($Z = 92$) and, in the optical case, to the P terms of cesium ($Z = 55$).

The electrostatic potential inside an atom with charge Z can be written in the form $V = \frac{Ze}{r} \varphi(\frac{r}{\mu})$, where φ is a numerical function in general smaller than one representing the screening effect of the other electrons. More precisely, close to the nucleus where the screening effect is minimum, $\varphi = 1$; as r increases φ decreases until, for $r = \infty$ and for neutral atoms, $\varphi = 0$.

Clearly the value of φ depends on the average distributions of the electrons around the nucleus. This electron cloud obeys PAULI's principle and thus, applying FERMI's

(*) Received by the Accademy on July 24, 1928; presented by the member O. M. Corbino.

(**) Translated from "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei", vol. 8, 1928, pp. 229-233, by P. Radicati di Brozolo.

(1) DIRAC, "Proc. Roy. Soc. (London)", A 117, 610; 118, 351 (1928).

statistics to this special degenerate gas, we get another relation between the potential and the charge density. Using POISSON'S equation FERMI⁽²⁾ obtained the following differential equation:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}}, \text{ where: } x = \frac{r}{\mu}; \quad \mu = \frac{3^{2/3}h^2}{2^{13/3}\pi^{4/3}me^2Z^{1/3}}.$$

If we consider a given electron we can suppose⁽³⁾ that the other $Z - 1$ electrons are distributed as in a neutral atom with number $Z - 1$. The potential acting upon the electron is therefore $V = \frac{e}{r}[1 + (Z - 1)\varphi(\frac{r}{\mu})]$; obviously in this way we neglect, in the case of an internal electron, the consequences of PAULI'S principle, which is not a statistical principle but a rigorous exclusion principle; in the case of an external electron we neglect instead the polarisation generated in the rest of the atom. In the first case the error is minimal while in the second case there are more serious uncertainties arising from the periodical system which produces regular oscillations of all the superficial atomic properties around the average; this average behaviour is the only one that shows up in our statistical treatment.

2. The general SCHRÖDINGER equation is^(*)

$$\Delta_2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r}(Z - 1)\varphi \right] \psi = 0.$$

If k denotes the azimuthal quantum, the wave function ψ splits into the product of a spherical function of order k times a function of the radius that we shall write in the form χ/r , where χ satisfies the equation

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \left[\frac{k(k+1)}{x^2} - a \frac{1 + (Z-1)\varphi}{x} + \varepsilon \right] \chi$$

with

$$a = \frac{8\pi^2m}{h^2}e^2\mu; \quad \varepsilon = -\frac{8\pi^2m}{h^2}\mu^2E.$$

When the radial quantum is 1 (there are no nodes in the function χ) (see Table I^(**)) the equation can easily be integrated numerically. Close to zero we have used a series expansion for the function φ .

⁽²⁾ FERMI, "Z. Physik", 48, 73 (1928).

⁽³⁾ FERMI, "Rend. Acc. Lincei", 7, 726 (1928).

^(*) Δ_2 is the actual notation used in the original, not corresponding to the standard one today. (Note of the Editor.)

^(**) Note added by the Editor in E. AMALDI, *op. cit.*

For the term $3d$ of gadolinium, $\varepsilon = 4.29$ and therefore the energy of the term is (in Rydberg) $-E = 86.3$ in very good agreement with observation (86.6). We notice that if we take into account the relativistic correction, the energy of the term decreases so that its distance from the lower term is lower by half than the distance between the real terms. In a simplified theory the splitting should be calculated on the basis of the interaction energy of the electron's magnetic moment with the average value of the virtual magnetic field acting on the electron.

In first approximation DIRAC's theory gives

$$\Delta E = \frac{5}{2} \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\int \psi \bar{\psi} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} dS}{mc^2}.$$

For gadolinium we find $\Delta E = 2.20 R$ in good agreement with experiment (2.4 R).

The same calculation for uranium gives: $-E = 258 R$ (also this in good agreement with the experimental value 255) and $\Delta E = 11.7$ instead of 12.96.

3. The calculation of the $6p$ term of cesium, perfectly analogous to the previous one, leads to an eigenfunction whose numerical values are reported herein (see table II^(*)).

For this term we find the value:

$$n = 24600 \text{ cm}^{-1}$$

to be compared with the experimental values of the doublet:

$$n_1 = 19674$$

$$n_2 = 20228;$$

using the splitting formula recalled above with a coefficient corresponding to a different azimuth quantum we get:

$$\Delta n = 1020 \text{ cm}^{-1}$$

instead of the experimental value:

$$\Delta n = 554 \text{ cm}^{-1}.$$

The difference between theory and experiment is well explained by the statistical approximations, the most important of which is the one depending upon the position of the element in the periodical system. More precisely since cesium is an alkaline metal, the ionic core has the compact structure of the rare gases, so that the effective charge for the optical electron tends very rapidly to 1. It is also not surprising that the splitting is much larger than the splitting between the energies. Intuitively this can be explained by the classical BOHR-SOMMERFELD model: indeed it is easy to see that all the very

(*) Note added by the Editor in E. AMALDI, *op. cit.*

eccentric orbits with the same azimuthal quantum numbers have approximately the same perihelion distance close to the nucleus so that they can be approximated by a unique orbit with the same motion. It is essentially in this region where the splitting is produced which is approximately inversely proportional to the orbit's period (that is the time interval between two passages at the perihelion). If, as it happens in our case, the departure from the Newtonian potential is large, even at a distance not too far from the aphelium a small departure from the orbit causes a huge change in the revolution period⁽⁴⁾. In any case a precise calculation shows that our interpretation is correct. Indeed let us suppose that we modify the statistical potential so as to make it agree with the experimental one. This can be achieved in infinitely many different ways, provided the correct potential always falls between the statistical one and the Newtonian limit. In this case one finds that there exists an upper limit to the splitting calculated on the basis of the corresponding eigenfunction which is

$$\Delta_s n = 750 \text{ cm}^{-1}.$$

This corresponds to passing abruptly from the statistical potential to the Newtonian one at a distance of approximately 2.2 \AA from the nucleus. If, more realistically, one puts

$$\frac{v_s - v}{v_s - v_n} = e^{-k\varphi},$$

one finds an almost perfect agreement with experiment.

Finally we have calculated the ratio of the intensities of the first two absorption lines. If we denote by ψ_0 the eigenfunction corresponding to the fundamental term $6s$ and by ψ'_1 and ψ''_1 the eigenfunctions corresponding to the terms $6p$ and $7p$ the ratio of the intensities is

$$\frac{i_1}{i_2} = \left[\frac{\int \psi_0 \bar{\psi}'_1 x^3 dx}{\int \psi_1 \bar{\psi}''_1 x^3 dx} \right]^2.$$

The eigenfunctions (see Table III^(*)) have been determined with the statistical^(**) potential up to the distance $r = 2.2 \text{ \AA}$ and with the Newtonian potential for larger distances. Under these conditions one obtains, as we have said, the experimental value

⁽⁴⁾ In general in the classical model there is a normal rosetta-like motion both for non-excited and for excited levels with small azimuth quantum. On the contrary, for certain highly excited levels with large azimuth quantum the BOHR-SOMMERFELD orbit splits into two different orbits. One of these reaches the interior of the atom, the other instead is mostly exterior. The model then loses its intuitive meaning.

^(*) Note added by the Editor in E. AMALDI, *op. cit.*

^(**) Note that in the original text of "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei" it is erroneously printed "statico" ("static"), but in the original manuscript it is clearly written "statistico" ("statistical"). (Note of the Editor in E. AMALDI, *op. cit.*)

for the term $6p$. It is remarkable that under the same conditions also the theoretical value of the term $7p$ agrees almost exactly with experiment. For simplicity we have not calculated theoretically the term $6s$; instead the eigenfunction ψ_0 has been constructed from infinity up to a distance close to the nucleus starting from the experimental value. The non-normalized functions χ are given in the table. The ratio between the intensities is

$$\frac{i_1}{i_2} = 125.$$

The splitting of the term $7p$ calculated from the eigenfunction ψ_1'' is

$$\Delta_s n = 220 \text{ cm}^{-1},$$

which should be considered as an upper limit. This is to be compared with the experimental value

$$\Delta n = 181.$$

The agreement this time is, for obvious reasons, much better.

Table I			Table II		Table III			
x	χ_{64}	χ_{92}	x	$\chi_{55}^{(*)}$	x	χ_0	χ_1'	χ_1''
0.2	0.174	2.138	0	0	4	-0.091	-0.038	-0.039
0.4	0.603	6.840	0.1	0.0519	5	-0.390	-0.269	-0.270
0.6	0.925	8.265	0.2	0.1030	6	-0.513	-3.099	-0.399
0.8	1.031	7.231	0.4	0.0627	7	-0.477	-0.426	-0.425
1.0	0.976	5.482	0.6	-0.0593	8	-0.336	-0.376	-0.373
1.2	0.838	3.739	0.8	-0.1442	9	-0.141	-0.276	-0.270
1.4	0.675	2.396	1	-0.1587	10	0.072	-0.147	-0.139
1.6	0.521	1.515	1.5	0.0019	11	0.279	-0.007	0.044
1.8	0.389	0.940	2	0.1831	12	0.466	0.134	0.147
2.0	0.284	0.570	3	0.2024	14	0.757	0.391	0.406
			4	-0.0374	16	0.931	0.596	0.601
			6	-0.3990	18	1.000	0.740	0.723
			8	-0.3764	20	1.005	0.840	0.788
			10	-0.1508	25	0.898	0.967	0.781
			12	0.1276	30	0.717	0.962	0.571
			16	0.5942	35	0.535	0.876	0.234
			20	0.8503	40	0.377	0.749	-0.154
			25	0.9281	50	0.171	0.484	-0.820
			30	0.8474	60	0.071	0.282	-1.227
			35	0.7012	70	0.027	0.153	-1.326
			40	0.5462	80	0.010	0.079	-1.221
			50	0.2990	100	0.001	0.019	-0.791

(*) The lower index in χ_{55} has been added by the Editor in E. AMALDI, *op. cit.*

Comment on the Scientific Paper no. 1a: "On the splitting of the Roentgen and optical terms caused by the electron rotation and on the intensity of the cesium lines".

The first scientific paper of Ettore Majorana, presented to the Accademia dei Lincei and published in the Rendiconti of that Academy in 1928, is joint work with Giovanni Gentile Jr., a junior professor of the Physics Institute in Rome. At that time Majorana was still an undergraduate physics student. His doctoral thesis under the supervision of E. Fermi was defended in 1929. This paper is an early application to outstanding problems of atomic spectroscopy, using the statistical model of atomic structure introduced by Fermi in a series of papers between 1927 and 1928⁽¹⁾. That framework has long been known as the *Thomas-Fermi model*, because the same essential idea was independently and simultaneously developed by L. H. Thomas at Cambridge University⁽²⁾. This model simplifies the complex problem of calculating the atomic structure of multielectron atoms. For each electron, an effective potential in its Schrödinger equation is approximated by a central field which accounts for the clustering of all other electrons centered around the nucleus. This effective potential is calculated through the statistical approach derived by Fermi, which is described on page 12, top, with the function φ derived from the Poisson equation including the charge density associated with the other electrons. The Schrödinger equation with the effective potential to be solved for the external electron is written down in the middle of page 12.

Fermi applied this statistical approach to derive the ionization energies of several atomic species, producing good agreement with known experimental results. Here, Gentile and Majorana (G&M) applied that approach to derive the ionization energy of an electron in the $3d$ orbit of gadolinium and uranium, again in good agreement with experimental values.

Furthermore, G&M also calculate the fine-structure splitting of different atomic states of gadolinium, uranium and cesium. As concerns both the ionization potential and the spin-orbit splitting in gadolinium and uranium, the levels treated are designated as Roentgen terms; today they would be called X-ray transitions, because their spectroscopic studies are performed in the X-ray region.

⁽¹⁾ E. FERMI, *Rend. Lincei* **6** (1927) 602; **7** (1928) 342, 726; *Z. Phys.* **48** (1928) 73; **49** (1928) 550.

⁽²⁾ L. H. THOMAS, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **23** (1927) 542.

From a classical standpoint, the spin-orbit splitting is produced by the coupling between the magnetic moment of the electron spin (“the electron rotation”), which was introduced in 1925 by G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit⁽³⁾, and the magnetic field produced by the electron motion around the nucleus. However G&M derive that splitting within the quantum mechanics approach formulated by P. A. M. Dirac. They apply first-order perturbation theory to the determination of the splitting of atomic energy levels. The equation on the top of page 13 is derived from the Dirac theory of ref. (1) of the original G&M paper. In that equation the potential within the integral is defined as v , while the Dirac paper reports the potential as V . The v quantity is not defined in G&M, though in Fermi’s papers v and V differ by a constant, and are otherwise equivalent in the determination of the spin-orbit splitting. The G&M formula suggests that the statistical Thomas-Fermi effective potential should be used for the determination of the splitting. However, the largest contribution to the spin-orbit splitting arises from the electron wave function near the nucleus, and there the effective potential reduces to the unshielded Coulomb potential.

For the ionization potential of gadolinium and uranium, the theoretical analysis reproduces experimental values within a few percent and the spin-orbit splitting within 20%. However for cesium $6P$ the agreement is not that good, only 20% for the ionization potential and 50% for the spin-orbit splitting. The authors claim that the reason for the difference is that for cesium, the effective potential experiences a strong radial dependence in the region near the nucleus, where the potential reduces to a screened Coulomb potential. Furthermore, because several eigenfunctions of the external electron have a similar spatial distribution, the first-order perturbation is not sufficiently accurate.

At this point the authors make an additional brilliant intuitive step into the analysis of the cesium data. They modify the cesium effective potential in order to obtain good agreement for the spin-orbit splitting. More precisely, they introduce a new effective potential derived from the Fermi statistical model, and from the central Coulombian potential as described in the second equation on page 14. Using that effective potential they claim to obtain a very good agreement with the experimental value of the spin-orbit splitting in the $6P$ and $7P$ cesium states.

The authors extended their spectroscopic analysis, focusing their attention on the ratio of the transition probability for the optical transitions from the $6S$ ground state to the two upper P states. They did not compare their value to experiments, but their result agrees with the presently accepted value within 5%. The interest in oscillator strengths expressed in this paper was linked to the research performed in Pisa by the group of L. Puccianti, where E. Fermi obtained his physics degree(*), and also to investigations performed by E. Fermi and F. Rasetti in Florence few years before. Fermi himself subsequently⁽⁴⁾ investigated the issue of anomalous intensity ratios for optical transitions

⁽³⁾ G. E. UHLENBECK and S. GOUDSMIT, *Naturwiss.* **13** (1925) 953; *Nature (London)* **117** (1926) 264.

(*) At that time Italian Universities offered one degree only in all subjects.

⁽⁴⁾ E. FERMI, *Z. Phys.* **59** (1930) 680.

in his publication of 1930, where he explained the anomalous ratio measured by Rasetti for the two components of the S - P doublets in cesium, that work being a masterpiece of atomic spectroscopy. Fermi used the G&M $6P/7P$ intensity ratio to derive his estimate for the $6p$ doublet intensity.

Fermi reported the G&M results at a restricted conference held in Leipzig in 1928 under the chairmanship of P. Debye. As described by F. Rasetti in the book of Fermi's collected papers, that was considered by Fermi as a great honor to report to a select international audience the results of the work performed in Rome. Fermi decided to review the statistical model of the atom and its applications to various problems by him and his collaborators. In a resumé of Fermi's lecture, published in Leipzig in 1928⁽⁵⁾, the G&M spin-orbit splittings and intensity ratios are discussed.

The G&M work is infrequently cited, apart from Fermi's citations. However, in 1933, T.-Y. Wu, completing his PhD at the University of Michigan under the direction of S. Goudsmit, examined theoretically the quantum defects of heavy atoms and compared his results to those of G&M⁽⁶⁾. In 1997 P. S. Lee and T.-Y. Wu⁽⁷⁾ re-examined the Thomas-Fermi statistical potential for neutral atoms and produced a better approximation for the effective potential, which they claimed to provide a better accuracy for the G&M numerical analyses.

* * *

EA is grateful to C. W. CLARK for carefully reading the English translations of the original paper and of his comment, and for useful suggestions.

ENNIO ARIMONDO
NIST, Gaithersburg, MD (USA)

⁽⁵⁾ E. FERMI, in *Quantentheorie und Chemie*, edited by H. Falkenhagen (Leipzig) 1928; reprinted in *Collected Papers*, Vol. 1 (The University of Chicago Press) 1961.

⁽⁶⁾ T.-Y. WU, *Phys. Rev.* **44** (1933) 727.

⁽⁷⁾ P. S. LEE and T.-Y. WU, *Chin. J. Phys.* **35** (1997) 742.

NOTA SCIENTIFICA n. 1b — SCIENTIFIC PAPER no. 1b

Comunicazione alla 22a Adunanza Generale della Società Italiana di Fisica
Talk given at the 22nd General Meeting of the Italian Physical Society

Majorana dott. Ettore: Ricerca di un'espressione generale delle correzioni di Rydberg, valevole per atomi neutri o ionizzati positivamente(*)

“Il Nuovo Cimento”, vol. 6, 1929, pp. XIV-XVI.

È un'applicazione, dice l'A., del metodo statistico ideato dal Fermi. Nell'interno di un atomo di numero Z ionizzato n volte, il potenziale si può mettere sotto la forma:

$$V = \frac{Ze}{r}\varphi(x) + C,$$

in cui x è la distanza misurata in unità(**):

$$\mu = 0,47Z^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{Z-n}{Z-n-1}\right)^{\frac{2}{3}}10^{-8}\text{cm},$$

φ obbedisce a una nota equazione differenziale e alle condizioni ai limiti:

$$\varphi(0) = 1, \quad -x_0\varphi'(x_0) = \frac{n+1}{Z} \quad \text{essendo} \quad \varphi(x_0) = 0,$$

e C , che è il potenziale al limite dello ione, vale

$$C = \frac{(n+1)e}{\mu x_0}.$$

(*) Comunicazione presentata alla 22a Adunanza Generale della Società Italiana di Fisica, Roma, 29 Dicembre 1928.

(**) Ne “Il Nuovo Cimento” è erroneamente stampato $0,47z^{-\frac{1}{3}}$ invece di $0,47Z^{-\frac{1}{3}}$. (Nota del Curatore.)

Nella formula ora scritta non si considera il potenziale locale, ma il potenziale medio efficace che agisce su un elettrone che si trovi in un determinato punto dello spazio. I due potenziali che in prima approssimazione sono identici, vanno distinti, come ora si è sottinteso, in seconda approssimazione, per tener conto che la carica elementare di un elettrone non è evanescente ma ha un valore finito. In realtà alla seconda approssimazione non si può procedere in modo rigoroso, ma nel caso di un atomo isolato si possono immaginare dei metodi abbastanza soddisfacenti, il più semplice dei quali porta alla espressione ora ricordata. Noto il potenziale al limite dell'atomo, si deduce l'energia potenziale massima che può avere un elettrone:

$$U = -Ce.$$

Dividendo gli elettroni in elettroni s , p , d , ..., secondo il quanto azimutale, poichè tutti gli elettroni presenti occupano i posti di minore energia, competerà statisticamente la stessa energia massima, che come subito si vede deve essere uguale ad U , così al più esterno degli elettroni s , come al più esterno degli elettroni p o d o f .

Se allora l_k è il quanto totale, per esempio dell'elettrone di q. az. k più esterno, esso sarà legato alla correzione di Rydberg, per i termini di q. az. k indicata con c_k , dalla relazione:

$$\frac{Rh}{(l_k - c_k)^2} = -U.$$

Il quanto totale dell'elettrone più esterno l_k si può calcolare in base al principio di Pauli quando sia noto il numero N_k di elettroni di q. az. k presenti nell'atomo. Questo numero si può calcolare, come ha mostrato il Fermi nel suo noto saggio sulla spiegazione statistica del sistema periodico. Se per evitare calcoli eccessivi si suppone, in via d'approssimazione, che la distribuzione per numeri quantici degli $Z - n$ elettroni presenti nell'atomo Z , ionizzato n volte, sia la stessa che si ha nell'atomo neutro di numero $Z - n$, sempre che n/Z sia piccolo, si ottiene l'annunciata espressione delle correzioni di Rydberg

$$c_k = k + (Z - n)^{\frac{1}{3}} \left[0,42n\Phi \left(0,565 \frac{k^2}{(Z - n)^{\frac{2}{3}}} \right) - 0,665 \sqrt{\frac{x_0(n + 1)}{Z^{\frac{1}{3}}(Z - n - 1)^{\frac{2}{3}}}} \right]$$

in cui k è il quanto azimutale aumentato di $\frac{1}{2}$ e Φ , una funzione già esaminata o calcolata dal Fermi. Le costanti numeriche non sono costanti sperimentali, ma numeri trascendenti, semplici espressioni algebriche di π , scritti per brevità in forma decimale. Ponendo $n = 0$ si ottengono le formule relative agli atomi neutri. L'accordo con l'esperienza è discreto: si hanno in genere, specie per i termini s , valori un po' più bassi di quelli osservati, ma la differenza è imputabile in massima al fenomeno di polarizzazione.

L'A. poi accenna a un *tentativo di valutazione statistica dell'effetto dei legami chimici sugli spettri di Röntgen*. Le sostanze esaminate sono gli elementi semplici 13-14-15-16, rispettivamente Al, Si, Ph, S e i loro composti ossigenati. In questi composti essi

si comportano rispettivamente come trivalenti, tetravalenti, pentavalenti o esavalenti; vale a dire che, ad es., una molecola di anidride solforica va ritenuta schematicamente come composta di un atomo di S ionizzato positivamente sei volte e da tre atomi di O ionizzati negativamente due volte. Si comprende come tale schematizzazione sia eccessiva in quanto lo ione esavalente di S non lascerebbe certo indisturbati i suoi vicini; si deve cioè pensare che gli elettroni di valenza, pur passando in prima approssimazione sotto il controllo dell'ossigeno, restino in realtà (e insieme forse con gli elettroni di valenza dell'ossigeno) in rapporti più o meno intimi con l'atomo di zolfo. Si può pensare di definire una ionizzazione effettiva come quella che nello ione isolato produrrebbe la stessa variazione dei termini di Röntgen. È quello che l'A. ha fatto. Il calcolo eseguito in seconda approssimazione, che in questo caso richiede speciali cautele, e in base alle misure fatte da Erik Bäcklin nel 1925 intorno allo spostamento verso le alte frequenze che subisce la riga K_{α} , quando si passa dall'elemento alla combinazione, dà per la ionizzazione efficace rispettivamente per(*)

$$\begin{array}{r} Z = 13 \quad 2 \quad 3 \\ 14 \quad 2,7 \quad 4 \\ 15 \quad 3,4 \quad 5 \\ 16 \quad 4,2 \quad 6. \end{array}$$

Le ricerche finora eseguite sono ancora troppo scarse per apprezzare in tutto il loro valore questi risultati, ma una cosa sembra acquisita, e cioè che l'esame dei termini profondi è destinato a dare indizi interessanti sulla struttura delle molecole.

* * *

L'A. ringrazia il prof. Fermi, che gli è stato largo di consigli e di suggerimenti intorno alle esposte nuove applicazioni di quel metodo statistico che tanta luce ha gettato sulla fisica atomica, e la cui fecondità, lungi dal mostrarsi esaurita, attende ancora di essere cimentata in campi di indagine più vasti e più ricchi di promesse.

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" accanto al valore "5" della tabella compare, per un presumibile errore tipografico, anche il valore "0,7". (Nota del Curatore.)

Commento alla Nota Scientifica n. 1b: “Ettore Majorana sul modello statistico di Thomas-Fermi per atomi e ioni. La comunicazione all’adunanza della Società Italiana di Fisica (Roma, Dicembre 1928)”.

In occasione della XXII Adunanza Generale della Società Italiana di Fisica, tenutasi presso l’Istituto Fisico della Regia Università di Roma dal 28 al 30 Dicembre 1928, nella seduta del 29 Dicembre, il giovane Ettore Majorana presentò una comunicazione dal titolo “Ricerca di un’espressione generale delle correzioni di Rydberg, valevole per atomi neutri o ionizzati positivamente”⁽¹⁾. Qui egli comunica i suoi risultati originali sul modello statistico di Thomas-Fermi per atomi e ioni, ottenuti nell’anno 1928, mentre egli era ancora studente della Scuola di Ingegneria. La comunicazione è molto dettagliata, e compare nel verbale della sessione, regolarmente pubblicato nella rivista della Società Italiana di Fisica, “Il Nuovo Cimento”. Essa fu anche registrata nella rivista tedesca “Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik” 55, 1183 (1929), e appare ora anche negli archivi elettronici dello Jahrbuch.

Ci proponiamo qui di descrivere l’atmosfera scientifica che circondava le ricerche alla base della comunicazione, e di porre nella giusta prospettiva storica il contributo di Majorana al settore. Nel corso di questa ricostruzione ci baseremo anche su documenti originali, conservati nell’Archivio Majorana della Domus Galilaeana di Pisa, e negli Archivi dell’Università di Roma “La Sapienza”.

Durante la sessione del 4 Dicembre 1927, all’Accademia dei Lincei in Roma, Orso Mario Corbino, membro dell’Accademia e anche direttore del Regio Istituto di Fisica dell’Università di Roma, presentò una nota⁽²⁾ di Enrico Fermi, dal titolo “Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell’atomo”. Le idee di Fermi sono molto semplici e potenti. In linea di principio, secondo la meccanica quantistica, un atomo dovrebbe essere descritto dalla sua equazione di Schrödinger completa. Tuttavia, a causa del grande numero di variabili coinvolte, per le applicazioni pratiche questa equazione era di difficile trattazione nel caso di atomi con un grande numero di elettroni. Invece

⁽¹⁾ E. MAJORANA, “Ricerca di un’espressione generale delle correzioni di Rydberg, valevole per atomi neutri o ionizzati positivamente”, *Nuovo Cimento* **6** (1929) XIV-XVI.

⁽²⁾ E. FERMI, “Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell’atomo”, *Rend. Accad. Lincei* **6** (1927) 602-607, (n. 43 in ⁽³⁾).

⁽³⁾ E. FERMI, *Note e Memorie (Collected Papers)*, Vol. **I**, Italia 1921-1938 (Accademia Nazionale dei Lincei, The University of Chicago Press, Roma-Chicago-Londra) 1962.

il metodo di Fermi è fondato sulla considerazione di una sorta di potenziale efficace di campo medio, prodotto dal nucleo e da tutti gli elettroni. Gli elettroni sono considerati come un insieme statistico completamente degenere, distribuito secondo la statistica di Fermi, sotto l'influenza locale di questo potenziale elettrostatico. La distribuzione statistica di Fermi fornisce la densità elettronica in ogni punto dello spazio in funzione del potenziale. D'altra parte, il potenziale soddisfa l'equazione di Poisson, con sorgenti date dal nucleo e dalla distribuzione media degli elettroni. Questo problema non lineare viene risolto facilmente tramite l'integrazione numerica di una equazione differenziale del secondo ordine, con condizioni al contorno appropriate, per una funzione, detta funzione di Fermi, che descrive l'effetto di schermaggio degli elettroni sul potenziale coulombiano del nucleo. La funzione di Fermi dipende solo dalla distanza dal nucleo. Si ottiene pertanto una drastica riduzione del numero delle variabili.

Sembra che Fermi non fosse al corrente che uno schema essenzialmente equivalente era stato presentato da Llewellyn Hilleth Thomas nell'articolo⁽⁴⁾, inviato alla *Cambridge Philosophical Society* il 6 Novembre, e letto nella sessione del 26 Novembre 1926. Tuttavia il programma di Fermi era molto più ambizioso, e si orientava verso una esplorazione sistematica delle proprietà atomiche usando il modello statistico. In particolare, i livelli spettroscopici degli atomi si sarebbero potuti calcolare nell'ambito di uno schema molto semplice, considerando un modello approssimato, dove un elettrone singolo (l'elettrone ottico) doveva obbedire all'equazione di Schrödinger, sotto l'influenza di un potenziale efficace opportunamente definito in termini della funzione di Fermi. In effetti, già nella prima metà del 1928 apparvero in Roma una serie di articoli, dove venivano considerati svariati problemi di fisica atomica. Lo stesso Fermi sviluppò alcune applicazioni al sistema periodico degli elementi, dando una spiegazione per la formazione dei gruppi di elementi anomali, quali le terre rare, e inoltre calcolò la correzione di Rydberg per i termini spettroscopici s . Inoltre Franco Rasetti⁽⁵⁾ calcolò i termini spettroscopici Röntgen M_3 per una serie di elementi. Anche Majorana, partecipò a questi sforzi, come vedremo, collaborando con Giovanni Gentile jr⁽⁶⁾. Tutti i risultati, ottenuti da Fermi e dai suoi associati, furono sintetizzati da Fermi in una rassegna molto dettagliata⁽⁷⁾, basata sul suo rapporto alla conferenza Leipziger Tagung, tenutasi a Lipsia il 17-24 Giugno 1928, dove era stato invitato da Peter Debye, con una lettera ancora conservata negli Archivi dell'Università di Roma.

(4) L. H. THOMAS, "The calculation of atomic fields", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **23** (1927) 542-548.

(5) F. RASETTI, "Eine statistische Berechnung der M-Röntgenterme", *Z. Phys.* **48** (1928) 546-549.

(6) G. GENTILE e E. MAJORANA, "Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio", *Rend. Accad. Lincei* **8** (1928) 229-233.

(7) E. FERMI, "Über die Anwendung der statistischen Methode auf die Probleme des Atombaues", in: *Quantentheorie und Chemie (Leipziger Vorträge 1928)*, a cura di H. Falkenhagen (S. Hirzel, Leipzig) 1928, pp. 95-111 (n. 49 in ⁽³⁾).

Nel modello statistico di Fermi calcoli lunghi, ma affrontabili, danno risultati in ragionevole accordo con le osservazioni sperimentali. Fermi nell'articolo⁽⁸⁾ estese il suo modello anche al caso di ioni positivi, con un determinato numero di ionizzazione.

Come prima ricordato, il coinvolgimento di Ettore Majorana sul modello statistico di Fermi iniziò molto presto. Ettore Majorana si era iscritto al biennio preparatorio per gli Aspiranti Ingegneri nell'autunno del 1923. Dai documenti conservati negli archivi dell'Università di Roma, possiamo seguire la sua carriera accademica come studente (numero di posizione 10447). Dopo aver conseguito il Diploma del biennio nel 1925, egli continuò i suoi studi presso il triennio della Scuola di Ingegneria. Egli superò regolarmente tutti gli esami richiesti durante gli anni accademici 1925-1926, e 1926-1927. Ci si sarebbe aspettati che egli finisse gli esami nel 1928, e prendesse la laurea in Ingegneria, con la presentazione di una Tesi. Invece nel 1928 Majorana, ancora come studente di Ingegneria, si presentò solo ad un esame. Questo era "Fisica Teorica", superato con la votazione di 100/100 e lode il 5 Giugno 1928. Il corso di "Fisica Teorica" era quello tenuto da Fermi presso la Facoltà di Scienze. Secondo i regolamenti, era possibile per uno studente di Ingegneria seguire corsi di altre Facoltà. È chiaro che gli interessi di Majorana si erano orientati verso la Fisica agli inizi del 1928. Solo nell'autunno del 1928 Majorana chiese il trasferimento ufficiale verso la Facoltà di Scienze. La Facoltà approvò il trasferimento nella seduta del 19 Novembre 1928. Da quel momento, Majorana superò gli esami richiesti per il corso di Fisica, e conseguì la Laurea, con il massimo dei voti e la lode, il 6 Luglio 1929.

A partire dall'inizio del 1928, dopo i suoi primi contatti con Fermi, in pochi mesi egli acquistò una profonda conoscenza della struttura del modello statistico di Fermi, recentemente elaborato. Infatti, nel suo quaderno di appunti "Volume II", conservato alla Domus Galilaeana in Pisa, che mostra all'inizio la data del 23 Aprile 1928, possiamo trovare, tra l'altro, un metodo molto abile per il calcolo dei valori della funzione di Fermi, una valutazione del potenziale infra-atomico senza l'uso del metodo statistico, alcune applicazioni del potenziale di Fermi, con il calcolo dell'energia atomica dello stato fondamentale, e la curva statistica dei termini fondamentali negli atomi neutri.

Nell'ambito del programma di applicazioni del modello statistico, all'inizio del 1928, Ettore Majorana dette inizio ad una fruttuosa collaborazione con Giovanni Gentile jr, il quale, dopo il conseguimento della Laurea in Pisa nel Novembre del 1927, era stato chiamato a Roma da Corbino su un posto temporaneo di assistente per sei mesi. I loro risultati furono pubblicati nel già ricordato lavoro in collaborazione⁽⁶⁾. In questo articolo, usando il metodo di Fermi, essi calcolano le energie e lo sdoppiamento dei livelli, dovuto allo spin dell'elettrone, per i termini spettroscopici Röntgen $3d$ del gadolinio ($Z = 64$), e dell'uranio ($Z = 92$), e per i termini ottici $6p$ del cesio ($Z = 55$). Inoltre essi calcolano il rapporto di intensità per le prime due righe di assorbimento del cesio. Il calcolo dello sdoppiamento dei termini spettroscopici è molto interessante. Infatti, a

⁽⁸⁾ E. FERMI, "Sul calcolo degli spettri degli ioni", *Mem. Accad. Italia*, I (Fis.) (1930) 149-156 (n. 63 in ⁽³⁾).

questo scopo gli autori fanno uso di una formula perturbativa data da Dirac solo pochi mesi prima.

I risultati di questo lavoro furono molto apprezzati. Infatti, Fermi ne fa riferimento nella sua relazione a Lipsia⁽⁷⁾, e inoltre, in lavori successivi, utilizza efficacemente l'espressione da loro trovata per i rapporti di intensità.

Una copia preliminare di questo lavoro in collaborazione con Gentile è conservata negli Archivi Majorana a Pisa. Le parti scritte a mano dai due autori si riconoscono immediatamente. La parte scritta da Majorana è molto interessante, perchè vi sono contenute alcune acute considerazioni sui limiti del modello statistico, dovuti a effetti di polarizzazione.

Dopo il lavoro in collaborazione con Gentile, Majorana nel 1928 continuò da solo le sue ricerche sul modello statistico dell'atomo, con grande autonomia scientifica ed efficacia.

Nella comunicazione del Dicembre 1928, Majorana presentò i suoi risultati sul miglioramento del modello di Fermi, e sull'estensione al caso di ioni positivi. L'articolo naturalmente è in italiano, ed è scritto nella forma di verbale della sessione, ma è molto chiaro e dettagliato.

L'essenza concettuale del miglioramento apportato da Majorana può essere facilmente riconosciuta. Nella formulazione originaria di Fermi, la distribuzione statistica degli elettroni è controllata dal campo elettrico microscopico locale, cioè dal campo elettrico che agirebbe su una ipotetica carica elettrica di prova infinitesima, mentre in Majorana essa è controllata dal campo efficace, che agisce su un generico elettrone in ogni punto dello spazio. Majorana osserva correttamente che i potenziali dei due campi elettrici, che in prima approssimazione sono uguali, devono essere tenuti distinti in una più precisa "seconda approssimazione", in modo da tener conto del fatto che la carica dell'elettrone non è infinitesima. Da un punto di vista fisico, nell'atomo di Fermi ogni elettrone interagisce anche con se stesso, poichè la repulsione tra elettroni è descritta mediante la densità elettronica complessiva. Nel miglioramento di Majorana, questa auto-interazione viene evitata, mediante l'uso di un semplice argomento di approssimazione media, che fornisce la relazione tra il campo microscopico e il campo efficace. Naturalmente il campo efficace di Majorana ha un'espressione leggermente diversa da quella fornita da Fermi. Inoltre, nella formulazione di Majorana gli atomi neutri, come gli ioni, hanno un raggio finito.

Si deve anche tenere in conto che la comunicazione fornisce il primo trattamento degli ioni positivi nell'ambito del modello statistico. Inoltre, si può anche comprendere facilmente che il miglioramento apportato da Majorana permette l'esistenza di ioni negativi di carica uno (in questo caso la densità elettronica si estende fino all'infinito). Lo schema di Fermi⁽⁸⁾ per gli ioni positivi comparirà più di un anno dopo, senza tener conto del miglioramento di Majorana.

La comunicazione continua con una espressione molto elegante, data in forma chiusa, delle correzioni di Rydberg alle linee spettrali. Qui Majorana non solo fa uso del suo schema migliorato, ma segue un metodo radicalmente diverso dal metodo introdotto da Fermi⁽⁷⁾.

Nella seconda parte della comunicazione, Majorana presenta un resoconto preliminare su un tentativo di valutazione statistica dell'effetto dei legami chimici sulle righe

spettrali Röntgen profonde. Egli prende in considerazione gli elementi Al, Si, Ph, S, e i loro composti ossigenati. Lo spostamento delle righe spettrali nei composti è interpretato in termini delle righe dell'elemento semplice con una ionizzazione efficace anche non intera, nell'ambito della sua teoria migliorata. Egli sviluppa complessi calcoli del secondo ordine, e utilizza i valori sperimentali disponibili per lo spostamento delle righe spettrali Röntgen profonde, nel passaggio dall'elemento semplice al composto ossigenato. I risultati sono sintetizzati in una tabella. Per gli elementi $Z = 13, 14, 15, 16$, di valenza chimica 3, 4, 5, 6, rispettivamente, egli trova che lo spostamento delle righe spettrali per il composto può essere interpretato attribuendo agli atomi isolati una ionizzazione efficace corrispondente ai valori 2, 2,7, 3,4, 4,2, rispettivamente. Queste idee estremamente interessanti potrebbero suggerire applicazioni ulteriori anche nella ricerca contemporanea.

Dopo la comunicazione del Dicembre 1928, l'attività del giovane Majorana si spostò verso la fisica nucleare. Infatti, egli conseguì la Laurea in Fisica presentando una Tesi di ricerca dal titolo "Sulla meccanica dei nuclei radioattivi", sotto la supervisione di Fermi.

Alla comunicazione del Dicembre 1928 non è stato fatto mai alcun riferimento, né nelle numerose pubblicazioni di Fermi e dei suoi associati, né in alcuna delle numerose ricostruzioni della vita e dell'attività scientifica di Majorana.

La proposta di Majorana per il miglioramento del potenziale efficace nel modello statistico sembra che non sia stata accettata da Fermi per molti anni, e dimenticata. Comunque, lo schema proposto fu alla fine utilizzato, senza riferimenti, nel monumentale lavoro conclusivo del 1934 di Fermi e Amaldi sul modello statistico dell'atomo⁽⁹⁾. In effetti, la monografia di Fermi e Amaldi è basata su un modello statistico "migliorato", come posto in rilievo dagli autori. Il miglioramento principale, relativo al potenziale efficace agente sull'elettrone ottico, è esattamente quello proposto da Majorana più di cinque anni prima.

Dopo 77 anni, la comunicazione del Dicembre 1928 all'Adunanza Generale della Società Italiana di Fisica è stata portata all'attenzione della comunità scientifica con una nota⁽¹⁰⁾ depositata nel sito arXiv.com, e ora compare finalmente qui, in questo Volume, tra le pubblicazioni scientifiche di Ettore Majorana.

FRANCESCO GUERRA(*)
 Università di Roma "La Sapienza"
 NADIA ROBOTTI(**)
 Università di Genova

⁽⁹⁾ E. FERMI e E. AMALDI, "Le orbite ∞ s degli elementi", *Mem. Accad. Italia*, **6** (Fis.) (1934) 119-149 (n. 82 in ⁽³⁾).

⁽¹⁰⁾ F. GUERRA e N. ROBOTTI, "A forgotten publication of Ettore Majorana on the improvement of the Thomas-Fermi statistical model", in rete nel sito <http://arXiv.com/physics/0511222>.

(*) e-mail: francesco.guerra@roma1.infn.it

(**) e-mail: robotti@fisica.unige.it

Majorana dr Ettore: Search for a general expression of Rydberg corrections, valid for neutral atoms or positive ions^(*)

It is an application, the Author says, of the statistical method devised by Fermi. In the interior of an atom with number Z , n times ionized, the potential can be put in the form

$$V = \frac{Ze}{r}\varphi(x) + C,$$

where x is the distance measured in units^(**)

$$\mu = 0.47Z^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{Z-n}{Z-n-1} \right)^{\frac{2}{3}} 10^{-8}\text{cm},$$

φ obeys a well known differential equation and the boundary conditions

$$\varphi(0) = 1, \quad -x_0\varphi'(x_0) = \frac{n+1}{Z} \quad \text{being} \quad \varphi(x_0) = 0,$$

and C , which is the potential at the boundary of the ion, has the value

$$C = \frac{(n+1)e}{\mu x_0}.$$

(*) Talk given at the 22nd General Meeting of the Italian Physical Society, Rome, 29 December 1928. Translated from "Il Nuovo Cimento", vol. **6** (1929) XIV-XVI, by F. Guerra and N. Robotti.

(**) Note that in the original text of "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed $0.47z^{-\frac{1}{3}}$ instead of $0.47Z^{-\frac{1}{3}}$. (Note of the Editor.)

In the formula above, one does not consider the local potential, but the mean effective potential acting on some electron in any given point in space. The two potentials, which to the first approximation are identical, are to be kept distinct, as has been now tacitly understood, in the second approximation, in order to take into account that the elementary charge of an electron is not vanishing, but has a finite value. As a matter of fact, one cannot proceed to the second approximation in a rigorous way, but, in the case of an isolated atom, one can imagine some quite satisfactory methods. Among these, the simplest one leads to the expression mentioned before. If the potential at the boundary of the atom is known, one can derive the highest potential energy for an electron:

$$U = -Ce.$$

By sorting the electrons in s , p , d , ... electrons, according to the azimuthal quantum number, since all electrons which are present must occupy the states of lower energy, then the same highest energy will be shared by the most external electron among the s electrons, and the most external electron among the p or d or f electrons. It is immediately seen that this highest energy must be equal to U .

Then, if l_k is the total quantum number, for example of the most external electron with azimuthal quantum number k , it will be connected to the Rydberg correction, denoted by c_k for terms of azimuthal number k , through the relation

$$\frac{Rh}{(l_k - c_k)^2} = -U.$$

The total quantum number l_k of the most external electron can be calculated through the Pauli principle, provided one knows the number N_k of electrons with azimuthal number k , which are present in the atom. It is possible to evaluate this number, as has been shown by Fermi in his well-known paper on the statistical explanation of the periodical system. In order to avoid excessive calculations, it is supposed, as an approximation, that the distribution, along the quantum numbers, of the $Z - n$ electrons, which are present in the Z atom, n times ionized, is the same as for a neutral atom, with atomic number $Z - n$, provided n/Z is small. Then, the announced expression of the Rydberg corrections is obtained

$$c_k = k + (Z - n)^{\frac{1}{3}} \left[0.42n\Phi \left(0.565 \frac{k^2}{(Z - n)^{\frac{2}{3}}} \right) - 0.665 \sqrt{\frac{x_0(n + 1)}{Z^{\frac{1}{3}}(Z - n - 1)^{\frac{2}{3}}}} \right],$$

where k is the azimuthal quantum number increased of $\frac{1}{2}$ and Φ is a function already examined or calculated by Fermi. The numerical constants are not experimental constants, but transcendent numbers, simple algebraic expressions of π , written here in decimal form, for the sake of brevity. By putting $n = 0$, the formulae relative to neutral atoms are obtained. The agreement with the experiments is quite good: in general, especially for the s terms, one obtains values slightly lower than the observed ones. But the difference can be attributed mostly to the phenomenon of polarization.

The Author then mentions an *attempt of statistical evaluation of the chemical bond effect on the Röntgen spectra*. The examined substances are the simple elements 13-14-15-16, respectively Al, Si, Ph, S, and their oxygen compounds. In these compounds, these elements behave as trivalent, tetravalent, pentavalent, or hexavalent, respectively. This means, for example, that a molecule of sulfuric anhydride should be considered schematically as composed by one six times positively ionized S atom, and by three two times negatively ionized O atoms. It is easily understood that this schematization is excessive. In fact, the hexavalent S ion would not leave its neighbors undisturbed. It is to be understood for the valence electrons that, even though they pass in first approximation under control of the oxygen, as a matter of fact, they maintain more or less close relations with the atom of sulfur (perhaps together with the valence electrons of oxygen). It is possible to think of an effective ionization, which would produce in the isolated ion the same variation of the Röntgen terms. This is what the Author did. The calculation has been performed in the second approximation with special care, by exploiting the measurements done by Erik Bäcklin in 1925, about the shift toward high frequencies for the line K_{α} , when one goes from the simple element to the compound. The calculation gives for the effective ionization respectively(*)

$Z = 13$	2	3
	14	2.7 4
	15	3.4 5
	16	4.2 6.

Researches performed until now are still too meager, in order to appreciate these results in their full value. However, one thing seems to be definitely acquired, *i.e.* that the analysis of the deep terms is bound to give interesting indications on the structure of the molecules.

* * *

The Author thanks prof. Fermi, who has been generous in advice and suggestions about the new applications of the statistical method, explained here. The statistical method has thrown considerable light on atomic physics. Its fecundity, far from being exhausted, is still waiting to be challenged in research fields, which are more extensive and richer in promises.

(*) In "Il Nuovo Cimento" aside the value "5" in the table, there appears, for a presumable typo, also the value "0.7". (Note of the Editor.)

Comment on the Scientific Paper no. 1b: “Ettore Majorana on the Thomas-Fermi statistical model for atoms and ions. The communication at the meeting of the Italian Physical Society (Rome, December 1928)”.

On occasion of the XXII General Meeting of the Italian Physical Society, held in Rome at the Physical Institute of the Royal University from December 28th to 30th, 1928, during the session of December 29th, the young Ettore Majorana delivered a communication with title “Ricerca di un’espressione generale delle correzioni di Rydberg, valevole per atomi neutri o ionizzati positivamente” (“Search for a general expression of Rydberg corrections, valid for neutral atoms or positive ions”)(¹). There he reports about his original results on the Thomas-Fermi statistical model for atoms and ions, obtained during the year 1928, while he was still a student at the School of Engineering. The communication is very detailed, and appears in the records of the session, regularly published in the journal of the Italian Physical Society, “Il Nuovo Cimento”. It was also listed in the German “Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik” 55, 1183 (1929). Now it appears also in the electronic archives of the Jahrbuch.

It is our purpose here to describe the scientific atmosphere in which the research presented in the communication was carried out and to put in the right historical perspective Majorana contribution to the field. In this reconstruction, we will rely also on original documents, kept in the Majorana Archive of the Domus Galilaeana in Pisa, and in the Archives of the University of Rome “La Sapienza”.

During the session of December 4th, 1927, at the Accademia dei Lincei, in Rome, Orso Mario Corbino, member of the Academy and also director of the Royal Institute of Physics of the University of Rome, presented a note(²) by Enrico Fermi, with the title “Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell’atomo,” (“A statistical method for the determination of some properties of the atom”). Fermi ideas are very simple and very powerful. In principle, according to quantum mechanics, an atom should be described by the full Schrödinger equation. However, due to the large

(¹) E. MAJORANA, “Ricerca di un’espressione generale delle correzioni di Rydberg, valevole per atomi neutri o ionizzati positivamente”, *Nuovo Cimento* **6** (1929) XIV-XVI.

(²) E. FERMI, “Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell’atomo”, *Rend. Accad. Lincei* **6** (1927) 602-607 (n. 43 in (³)).

(³) E. FERMI, *Note e Memorie (Collected Papers)*, Vol. **I**, Italia 1921-1938, (Accademia Nazionale dei Lincei, The University of Chicago Press, Roma-Chicago-Londra) 1962.

number of variables involved, for practical applications, this equation was hard to control when the number of electrons is large. Fermi treatment is based instead on a kind of electrostatic effective mean-field potential, produced by the nucleus and all the electrons. The electrons are considered as a completely degenerate statistical ensemble, obeying Fermi statistics, under the local influence of this electrostatic potential. Fermi statistical distribution gives the electron density as a function of the potential in each point in space. On the other hand, the potential satisfies the Poisson equation, with sources given by the nucleus and the electron mean distribution. This nonlinear problem is easily solved by relying on the numerical integration of a second-order differential equation, with appropriate boundary conditions, for the so-called Fermi function, describing the screening effect of the electrons on the Coulomb potential of the nucleus. The Fermi function depends only on the distance from the nucleus. Therefore, we have a drastic reduction in the number of variables.

Apparently Fermi was unaware that an essentially equivalent scheme had been presented by Llewellyn Hilleth Thomas in the paper⁽⁴⁾ sent to the Cambridge Philosophical Society on November 6th and read on November 22nd, 1926. However, Fermi program was much more ambitious, aiming at a systematic exploration of atomic properties by using the statistical model. In particular, the spectroscopic levels of atoms could be calculated through a very simple scheme, by considering an approximate model, where a single electron (the optical electron) would obey Schrödinger equation under the influence of a properly defined effective potential, depending on the Fermi function. In fact, already during the first half of the year 1928 a series of papers appeared in Rome, where various atomic problems were considered. Fermi himself made applications to the periodic system of elements, giving a way to understand the formation of the the anomalous groups of elements, as the rare-earth elements, and evaluated Rydberg correction for the spectroscopic *s*-terms. Then Franco Rasetti⁽⁵⁾ calculated the M_3 spectroscopic Röntgen terms for a series of elements. Also Ettore Majorana, participated to these efforts, as we will see, by collaborating with Giovanni Gentile jr⁽⁶⁾. All results, obtained by Fermi and his associates in the first half of 1928, were summarized by Fermi in a very detailed review⁽⁷⁾, based on his report at the conference Leipziger Tagung, held in Leipzig on June 17-24, 1928, where he was invited by Peter Debye, with a letter still kept in the Archives of the University of Rome.

(4) L. H. THOMAS, "The calculation of atomic fields", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **23** (1927) 542-548.

(5) F. RASETTI, "Eine statistische Berechnung der M-Röntgenerme", *Z. Phys.* **48** (1928) 546-549.

(6) G. GENTILE and E. MAJORANA, "Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio", *Rend. Accad. Lincei* **8** (1928) 229-233.

(7) E. FERMI, "Über die Anwendung der statistischen Methode auf die Probleme des Atombaues", in: *Quantentheorie und Chemie (Leipziger Vorträge 1928)* edited by H. Falkenhagen (S. Hirzel, Leipzig) 1928, pp. 95-111, (n. 49 in (3)).

In the Fermi statistical model, long, but affordable, calculations give numerical results in reasonable agreement with the experimental findings. Fermi extended this scheme to the case of positive ions, with a given ionization number, in his paper⁽⁸⁾.

As mentioned before, the involvement of Ettore Majorana with Fermi statistical model started very early. Ettore Majorana had enrolled in the two year preparatory course for Engineers in Rome in Fall 1923. From the records kept in the archives of the University of Rome, we can follow his academic career as student (position number 10447). After obtaining the two-year diploma in 1925, he continued his studies in the three-year School of Engineering. He took regularly all requested examinations during the academic years 1925-1926, and 1926-1927. He was expected to finish the examinations in 1928 and to obtain the doctoral degree as Engineer, with the submission of a Thesis. However, during 1928 Majorana, still as a student of Engineering, took only one examination. This was "Theoretical Physics", passed with a marking of 100/100 "cum laude", on June 5th, 1928. The course "Theoretical Physics" was the course given by Enrico Fermi at the Faculty of Sciences. According to the rules, it was possible, for a student of Engineering, to take courses held in different Faculties. It is clear that the interests of Majorana had moved toward Physics at the beginning of 1928. It was only in Fall 1928 that Majorana asked to move officially to the Faculty of Sciences. The Faculty gave his assent during the session of November 19th, 1928. Then Majorana took the requested examinations in Physics, and obtained his doctoral degree, on July 6th, 1929, with full marks and "laude".

Starting from the beginning of 1928, when he initiated his contacts with Fermi, in few months, he acquired a very deep knowledge of the structure of the recently established Fermi statistical model. In fact, in his notebook "Volume II", kept at the Domus Galilaeana in Pisa, reporting at the beginning the date of April 23rd, 1928, we can find, among other things, a very clever calculation of the values of the Fermi function, an evaluation of the infra-atomic potential without using the statistical method, some applications of Fermi potential with the calculation of the atomic ground state energy, and the statistical curve of the fundamental terms in neutral atoms.

Along the program of applications of the statistical model, at the beginning of 1928, Ettore Majorana began a fruitful collaboration with Giovanni Gentile jr, who, after his graduation in Pisa in November 1927, received from Corbino a six month temporary appointment as assistant in Rome. Their results were published in the already mentioned joint paper⁽⁶⁾. In this paper, by using Fermi method, they calculate the energy and the level splitting, due to the electron spin, for the $3d$ spectroscopic Röntgen term of gadolinium ($Z = 64$), and uranium ($Z = 92$), and for the $6p$ optical term of caesium ($Z = 55$). Moreover, they calculate also the intensity ratio for the first two absorption lines of caesium. The calculation of the level splitting of spectroscopic terms is very interesting. In fact, to this purpose the authors exploit a perturbation formula given by Dirac only few months before.

⁽⁸⁾ E. FERMI, "Sul calcolo degli spettri degli ioni", *Mem. Accad. Italia*, **I** (Fis.) (1930) 149-156 (n. 63 in ⁽³⁾).

The results of this paper were well received. In fact, Fermi makes reference to them in his Leipzig report⁽⁷⁾, and heavily exploits the expression given for the intensity ratios in his subsequent papers.

An early draft of this joint paper with Giovanni Gentile jr is kept in the Majorana Archives in Pisa. Handwritten parts produced by the two coworkers are easily recognizable. The part written by Majorana is extremely interesting, because it contains some deep considerations about the limits of the statistical model, due to polarization effects.

After the joint paper with Gentile, Ettore Majorana in 1928 continued alone his research on the statistical model for the atom, with great scientific autonomy and effectiveness.

In his December 1928 communication, Majorana presented results about his improvement of the Fermi model, and its extension to positive ions. The paper of course is in Italian, and is written in the form of a record of the session, but is very clear and detailed.

The very essence of Majorana improvement can be easily recognized. In the original Fermi formulation, the statistical distribution of electrons is ruled by the microscopic local electric field, *i.e.* the electric field acting on some hypothetical vanishing test charge, while in Majorana it is ruled by the effective field, acting on some electron in any given point in space. Majorana correctly remarks that these two electric fields, which to the first approximation are identical, are to be kept distinct in a more refined "second approximation", in order to take into account that the elementary charge of an electron is not vanishing. From a physical point of view, in Fermi atoms each electron is interacting also with itself, because the repulsion between electrons is described through the overall electric density. In Majorana improvement this self-interaction is avoided, through a very simple approximate average argument, giving the relation between the microscopic and the effective potentials. Of course, the Majorana effective field acting on the optical electron is slightly different with respect to the Fermi expression. Moreover, in the Majorana formulation neutral atoms (and ions) have a finite radius.

It must be also appreciated that the communication gives the first treatment of positive ions in the scientific literature, in the frame of the statistical model. Moreover, it is very simple to realize that Majorana improvement allows for stable negative ions of charge one (in this case with an electronic density extending to infinity). Fermi scheme⁽⁸⁾ for positive ions comes more than one year later, and does not take into account Majorana improvement.

The communication continues with a very elegant expression, in closed form, of the Rydberg corrections to the spectral lines. Here, Majorana not only exploits the new improved proposed scheme, but follows a method radically different from the method introduced by Fermi⁽⁷⁾.

In the second part of the communication, Majorana gives a preliminary account about an attempt of statistical evaluation of the effect of chemical bonds on the deep Röntgen spectral lines. He considers the elements Al, Si, Ph, S, and their molecular compounds with oxygen. The displacement of the spectral lines in the compounds is interpreted in terms of the lines of the simple elements with some effective even non-integer ionization, in the frame of his improved theory. He performs an elaborate second-order calculation,

and exploits the available experimental values for the displacement of the deep Röntgen spectral lines, going from the simple element, to its oxygen compound. The results are summarized in a table. For the elements $Z = 13, 14, 15, 16$, with chemical valences given by 3, 4, 5, 6, respectively, he finds that the displacement of the spectral lines for the compounds can be interpreted by attributing to the isolated atoms an effective ionization with values 2, 2.7, 3.4, 4.2, respectively. These extremely interesting ideas could suggest further applications even in present-day research.

After the December 1928 communication, at the beginning of 1929, the activity of the young Majorana shifted toward nuclear physics. In fact, he obtained his doctoral degree in Physics by presenting a research Thesis with the title “Sulla meccanica dei nuclei radioattivi” (“On mechanics of radio-active nuclei”), under Fermi supervision.

The December 1928 communication did not receive any mention, neither in the numerous publications of Fermi and his associates on the subject, nor in any of the further reconstructions of the life and scientific activity of Ettore Majorana.

The Majorana proposal for the improvement of the effective potential in the statistical model apparently was not accepted by Enrico Fermi for years, and forgotten. However, it was finally exploited, without reference, in the 1934 monumental conclusive paper by Fermi and Amaldi on the statistical model for atoms⁽⁹⁾. In fact, the Fermi-Amaldi paper is based, as emphasized by the authors, on an “improved” statistical model. The main improvement, concerning the effective potential acting on the optical electron, is exactly what was proposed by Majorana, more than five years before.

After 77 years, the December 1928 communication to the General Meeting of the Italian Physical Society has been brought to the attention of the scientific community with a note⁽¹⁰⁾ posted on arXiv.com, and now it finally appears here in this Volume among the scientific publications of Ettore Majorana.

FRANCESCO GUERRA(*)
 Università di Roma “La Sapienza”
 NADIA ROBOTTI(**)
 Università di Genova

⁽⁹⁾ E. FERMI and E. AMALDI, “Le orbite ∞ s degli elementi”, *Mem. Accad. Italia*, **6** (Fis.) (1934) 119-149 (n. 82 in ⁽³⁾).

⁽¹⁰⁾ F. GUERRA and N. ROBOTTI, “A forgotten publication of Ettore Majorana on the improvement of the Thomas-Fermi statistical model”, available on <http://arXiv.com/physics/0511222>.

(*) e-mail: francesco.guerra@roma1.infn.it

(**) e-mail: robotti@fisica.unige.it

Sulla formazione dello ione molecolare di elio

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Il Nuovo Cimento”, vol. 8, 1931, pp. 22-28.

Sunto. — La stabilità dello ione He_2^+ (*) può essere studiata, anche quantitativamente, con il metodo di HEITLER e LONDON, e i risultati si accordano con i dati sperimentali disponibili. Si riconosce che questo composto è analogo a H_2 , benché l'elettrone esterno si trovi in uno stato differente, e che gli elettroni interni non hanno solo l'ufficio di schermare le cariche dei nuclei, ma contribuiscono in modo essenziale alla costruzione molecolare.

Le osservazioni di WEIZEL e PESTEL⁽¹⁾, CURTIS e HARVEY⁽²⁾ e altri sullo spettro di bande dell'elio hanno dimostrato che alcune costanti molecolari (quanto di oscillazione, momento di inerzia) tendono, per gli stati più elevati dell'elettrone luminoso, a limiti determinati che è naturale attribuire alle corrispondenti grandezze dello ione He_2^+ ; di questo è così dimostrata la possibilità di esistenza, almeno nello stato fondamentale, a cui è da ascrivere⁽³⁾ con sicurezza la configurazione $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2 \Sigma$, e poiché si ha motivo

(*) Ne “Il Nuovo Cimento” è stampato He_2 invece di He_2^+ . (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

⁽¹⁾ W. WEIZEL e E. PESTEL, “Z. Physik”, 56, 97 (1929); W. WEIZEL, “Z. Physik”, 56, 727 (1929).

⁽²⁾ W. E. CURTIS e A. HARVEY, “Proc. Roy. Soc. (London)”, A 125, 484 (1929).

⁽³⁾ W. WEIZEL, “Z. Physik”, 56, 727 (1929).

di credere, secondo le più recenti conclusioni di W. WEIZEL⁽⁴⁾ che la molecola neutra si formi da un atomo nello stato fondamentale e un atomo eccitato, si può presumere che lo ione si dissocia, per quanti di oscillazione elevati, o per un allontanamento adiabatico dei nuclei, se, come vogliamo fare, li riguardiamo come fissi, in un atomo neutro e un atomo ionizzato, entrambi nello stato fondamentale⁽⁵⁾. Noi vogliamo qui studiare la reazione $\text{He} + \text{He}^+$ dal punto di vista energetico e dimostrare che essa può effettivamente condurre alla formazione dello ione molecolare; un calcolo di prima approssimazione dà anzi in questo caso per la distanza di equilibrio dei nuclei e per il quanto di oscillazione valori che assai bene si accordano con quelli trovati sperimentalmente. Il metodo seguito è quello applicato la prima volta da HEITLER e LONDON⁽⁶⁾ allo studio della molecola di idrogeno e consiste nell'assumere, come autofunzioni elettroniche della molecola, determinate combinazioni lineari delle autofunzioni appartenenti agli atomi separati, e nel valutare su di esse il valor medio dell'interazione fra i due atomi; ma è da notare che avendo i nuclei la stessa carica ed essendo uno degli atomi ionizzato, il problema è, come vedremo, meccanicamente affatto diverso da quello esaminato da HEITLER e LONDON, e in genere da quello contemplato dall'ordinaria teoria della valenza omeopolare⁽⁷⁾.

1. Supponiamo gli atomi separati e a grande distanza; se prescindiamo per un momento dal fatto che stati in cui il primo atomo è neutro e il secondo ionizzato, e stati in cui il primo atomo è ionizzato e il secondo neutro, hanno la stessa energia e vanno quindi considerati insieme nel calcolo di perturbazione, e riguardiamo invece il *primo* atomo come neutro e il *secondo* come ionizzato, abbiamo un problema meccanicamente simile a quello della reazione⁽⁸⁾ $\text{He} + \text{H}$, e poiché a He appartiene un anello elettronico chiuso, il modo di reazione è unico, cioè non ha luogo per l'interazione dei due atomi una separazione di termini (soddisfacenti al principio di PAULI) e inoltre le forze di risonanza sono certamente repulsive. Vero è che le forze attrattive di polarizzazione sono nel nostro caso di natura diversa da quelle che agiscono fra atomi neutri, perchè mentre le prime dipendono da un potenziale che diminuisce a grande distanza come R^{-4} le seconde si annullano più rapidamente, dipendendo da un potenziale che varia come R^{-6} , ma è da osservare che la polarizzabilità dell'atomo neutro He è assai piccola e perciò in nessun modo le forze di polarizzazione possono da sole dare origine ad uno stabile legame. Per spiegare la affinità chimica fra He e He^+ dobbiamo invece togliere la restrizione posta e lasciare libero l'atomo neutro, di ceder quando voglia, un elettrone all'atomo ionizzato

⁽⁴⁾ W. WEIZEL, "Z. Physik", 59, 320 (1930).

⁽⁵⁾ Cfr. F. HUND, "Z. Physik", 63, 719 (1930).

⁽⁶⁾ W. HEITLER e F. LONDON, "Z. Physik", 44, 455 (1927).

⁽⁷⁾ F. LONDON, "Z. Physik", 46, 455 (1927); 50, 24 (1928). W. HEITLER, "Z. Physik", 46, 47 (1927); 47, 835 (1928). Per una visione di insieme, W. HEITLER, "Phys. Z.", 31, 185 (1930). E. A. HYLLEAAS ha incontrato l'ulteriore degenerazione derivante dall'uguaglianza dei nuclei nello studio della reazione fra atomi di idrogeno diversamente eccitati, "Z. Physik", 51, 150 (1928).

⁽⁸⁾ Cfr. G. GENTILE, "Z. Physik", 63, 795 (1930).

e di assumerne quindi le veci. Questo ha per effetto di sdoppiare il termine risultante dall'unione dei due atomi, press'a poco senza alterarne il valor medio; e lo sdoppiamento dipende non più dalla risonanza degli elettroni, ma dal comportamento delle autofunzioni di fronte alla riflessione nel centro della molecola, potendo esse restare inalterate per la detta *inversione*, e si dicono *pari*, oppure mutare segno, e si dicono *dispari*. Si potrebbe parlare di *risonanza* dei nuclei, ma solo per metafora, non già nel senso proprio, che è differente, poiché qui consideriamo soltanto le autofunzioni elettroniche. La separazione del termine dovuta alla sua parità o disparità è di un'ordine di grandezza maggiore dell'energia dovuta alle forze repulsive di *valenza*; dobbiamo quindi ritenere che uno dei modi di reazione corrisponde a repulsione e non dà luogo a legame chimico, mentre l'altro dà origine a forze attrattive e conduce alla formazione dello ione molecolare. Possiamo riconoscere i due modi di reazione con le considerazioni seguenti. Poiché abbiamo a che fare con tre elettroni, si può pretendere che due di essi, e siano l'elettrone 1, e l'elettrone 2, abbiano lo *spin* parallelo; l'autofunzione deve allora essere antisimmetrica nelle coordinate dei due primi elettroni, così che per nuclei molto lontani essi stanno certamente l'uno in vicinanza di un nucleo (a), e l'altro in vicinanza dell'altro nucleo (b) e possono cambiar di sede solo contemporaneamente; e l'autofunzione, in quanto dipendente dai primi due elettroni, cambia allora di segno. Segue che gli elettroni 1 e 2 danno luogo insieme ad un termine dispari descritto da un'autofunzione che cambia segno per inversione; ma i soli stati individuali che vengono in considerazione sono quelli che derivano dagli stati $1s$ degli atomi separati e cioè $1s\sigma$ e $2p\sigma$, il primo pari ed il secondo dispari, e gli elettroni 1 e 2 sono quindi un'elettrone $1s\sigma$ e uno $2p\sigma$ (o viceversa).

Al terzo elettrone potremo assegnare un'autofunzione pari ($1s\sigma$) o una dispari ($2p\sigma$) che si formano rispettivamente per somma o differenza dalle autofunzioni degli atomi separati; nel primo caso otteniamo come configurazione complessiva $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2 \Sigma$, quella cioè che appartiene allo stato fondamentale di He_2^+ e corrisponde effettivamente ad attrazione dei due atomi, nel secondo caso troveremo invece la configurazione $1s\sigma(2p\sigma)^2 \Sigma$ che appartiene a un livello eccitato, probabilmente instabile di He_2^+ , e dà luogo all'altro modo di reazione, quello cioè che corrisponde a repulsione. Vediamo di qui che la causa essenziale della stabilità di He_2^+ è quella stessa che provvede alla stabilità dello ione molecolare di idrogeno.

2. Se con Φ e φ indichiamo le autofunzioni dell'atomo (a), rispettivamente neutro o ionizzato, e con Ψ e ψ quelle analoghe dell'atomo (b), come autofunzioni imperturbate degli atomi separati dovremo considerare le sei seguenti che derivano l'una dall'altra per permutazione degli elettroni e scambio dei nuclei:

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 = \varphi_1 \Psi_{23}, & B_1 = \psi_1 \Phi_{23}, \\ A_2 = \varphi_2 \Psi_{31}, & B_2 = \psi_2 \Phi_{31}, \\ A_3 = \varphi_3 \Psi_{12}, & B_3 = \psi_3 \Phi_{12}. \end{cases}$$

L'interazione degli atomi, spezza il termine multiplo sei volte separando le autofun-

zioni corrette di approssimazione nulla secondo i caratteri di simmetria⁽⁹⁾ negli elettroni e secondo il comportamento rispetto all'inversione. Indicando con un segno + i termini pari e con un segno - i termini dispari, le sole simmetrie che si presentano sono le seguenti:

$$(\overline{123})^+, (\overline{123})^-, (\underline{123})^+, (\underline{123})^-,$$

e si hanno in corrispondenza quattro termini, di cui i primi due sono semplici e gli ultimi due doppi, per degenerazione nascosta; e poiché i primi due sono esclusi dal principio di PAULI, essendo simmetrici nei tre elettroni, rimangono in campo il terzo, che a causa della sua parità corrisponde alla configurazione $1s\sigma(2p\sigma)^2{}^2\Sigma$, e il quarto che è per noi il più interessante, poiché porta alla formazione di He_2^+ e quindi alla configurazione $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2\Sigma$. Le autofunzioni dei quattro termini sono, a meno di un fattore di normalizzazione:

$$(2) \quad \begin{cases} (\overline{123})^+ & y_1 = A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3, \\ (\overline{123})^- & y_2 = A_1 + A_2 + A_3 - B_1 - B_2 - B_3, \\ (\underline{123})^+ & y_3 = A_1 - A_2 + B_1 - B_2, \\ (\underline{123})^- & y_4 = A_1 - A_2 - B_1 + B_2, \end{cases}$$

essendosi scelta per il terzo e il quarto l'autofunzione antisimmetrica in 1 e 2. La funzione di perturbazione è naturalmente differente secondo che si considera l'uno o l'altro degli stati imperturbati (1), poiché gli elettroni non figurano simmetricamente nell'Hamiltoniana degli atomi astrattamente separati, e abbiamo allora sei Hamiltoniane differenti, secondo la configurazione degli elettroni, per gli atomi separati e una sola, simmetrica, per gli atomi riuniti. Nella configurazione A_1 l'energia di perturbazione sarà espressa, ad es., da

$$H = \frac{4e^2}{R} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{13}} - \frac{2e^2}{r_{1b}} - \frac{2e^2}{r_{2a}} - \frac{2e^2}{r_{3a}},$$

essendo R , r_{12} , r_{13} , r_{1b} , r_{2a} , r_{3a} , le distanze del nucleo e dell'elettrone del primo atomo dal nucleo e dagli elettroni del secondo. La variazione di un generico autovalore si otterrà in prima approssimazione dall'espressione simbolica

$$(3) \quad E_i = \frac{\int \bar{y}_i H y_i d\tau}{\int \bar{y}_i y_i d\tau} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

⁽⁹⁾ F. HUND, "Z. Physik", 43, 788 (1927).

badando che H opera diversamente, come si è detto, sui vari termini da cui ogni y_i risulta costituita a norma di (2). Esplicitando la (3) troviamo

$$(4) \quad \begin{cases} E_1 = \frac{I_0 + 2I_1 + 2I_2 + I_3}{1 + 2S_1 + 2S_2 + S_3}, \\ E_2 = \frac{I_0 - 2I_1 + 2I_2 - I_3}{1 - 2S_1 + 2S_2 - S_3}, \\ E_3 = \frac{I_0 - I_1 - I_2 + I_3}{1 - S_1 - S_2 + S_3}, \\ E_4 = \frac{I_0 + I_1 - I_2 - I_3}{1 + S_1 - S_2 - S_3}, \end{cases}$$

essendo

$$(5) \quad S_1 = \int B_2 A_1 d\tau; \quad S_2 = \int A_2 A_1 d\tau; \quad S_3 = \int B_1 A_1 d\tau;$$

$$(6) \quad \begin{aligned} I_0 &= \int A_1 H A_1 d\tau; & I_1 &= \int B_2 H A_1 d\tau; & I_2 &= \int A_2 H A_1 d\tau; \\ & & I_3 &= \int B_1 H A_1 d\tau. \end{aligned}$$

Per nuclei abbastanza lontani (ma non eccessivamente) tutti gli integrali I sono negativi e gli S positivi e per l'ordine di grandezza si ha

$$\begin{aligned} -I_1 &> -I_2 > -I_3, \\ S_1 &> S_2 > S_3. \end{aligned}$$

Prescindendo nelle (4) dalle variazioni dei denominatori, che a distanza sufficientemente grande sono prossimi all'unità, e trascurando I_3 , l'energia risulta essenzialmente costituita dalla "energia elettrostatica" I_0 , che è comune a tutti i termini, anche non paulistici, e si può trascurare a causa della sua piccolezza, e da combinazioni della "energia di scambio" I_2 , che corrisponde alle forze di valenza, e della energia I_1 , che è preponderante e nasce dalla simmetria del termine rispetto alla inversione. Limitandoci alle soluzioni $y_3^{(*)}$ e y_4 che sole hanno senso fisico, e badando all'ordine di grandezza e al segno di I_1 e I_2 , troviamo confermato che $y_3^{(*)}$ dà luogo a repulsione mentre y_4 conduce alla formazione molecolare.

Di quest'ultima ormai ci occuperemo esclusivamente.

3. La valutazione di E_4 in funzione della distanza, cioè la determinazione della così detta curva potenziale della molecola He_2^+ , richiede la valutazione degli integrali (5) e (6), ma poiché la autofunzione dell'atomo neutro di elio nello stato fondamentale, pur

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è erroneamente stampato y_8 . (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

essendo stata numericamente calcolata con notevole esattezza⁽¹⁰⁾ non è suscettibile di semplice espressione analitica, dobbiamo di necessità operare con autofunzioni imperturbate alquanto schematizzate. Potremmo ad esempio, secondo l'uso, assumere come stato fondamentale di He il prodotto di due autofunzioni del tipo idrogeno con uno Z efficace pari a $1,6 \div 1,7$, secondo il criterio a cui si ricorre per la determinazione; così se si vuole che l'energia media abbia il valore migliore (minimo) bisogna porre $Z = 2 - \frac{5}{16} = 1,6875$; se invece si vuole che la costante diamagnetica si accordi, così con il valore sperimentale, come con quello fornito da accurate valutazioni⁽¹¹⁾ teoriche, bisogna assumere $Z = 1,60$. Ma incertezze di maggiore gravità sono insite nella natura del metodo, il quale non è atto a fornire che una prima alquanto rozza approssimazione. Il metodo di HEITLER e LONDON dà infatti indicazioni inattendibili per atomi molto lontani, e non solo perché trascura le forze di polarizzazione⁽¹²⁾, che qui sono preponderanti, ma anche perché dà errate, nell'ordine di grandezza e *nel segno*, le forze di risonanza. Nel caso, ad esempio, della molecola di idrogeno, trattato da HEITLER e LONDON, l'energia di scambio diviene positiva a grandissima distanza, poiché allora l'integrale di SUGIURA⁽¹³⁾ prevale su tutti gli altri, ciò che porterebbe a credere che la soluzione antisimmetrica sia più profonda di quella simmetrica. Ma questo è da escludere in base a teoremi generali⁽¹⁴⁾, e l'apparenza contraria indica solo imperfezione del metodo. Per distanze poi dell'ordine della distanza di equilibrio è verosimile che le autofunzioni perturbate differiscano assai sensibilmente da quelle imperturbate, cosicché la prima approssimazione non può avere che un valore indicativo. Per queste ragioni abbiamo creduto di procedere ad una schematizzazione che può parere eccessiva, e che si potrebbe infatti diminuire, ma con calcoli laboriosi e di non certa utilità. Abbiamo quindi assunto come autofunzioni dei singoli atomi, autofunzioni del tipo idrogeno, ma con uno stesso $Z = 1,8$, così per l'atomo neutro, come per lo ione. Gli integrali (5) e (6) si riducono allora a integrali elementari ben conosciuti, fra cui quello già ricordato di SUGIURA. Si trova così che la curva potenziale, presenta un minimo quando la distanza dei nuclei ha il valore

$$d = 1,16$$

mentre sperimentalmente⁽¹⁵⁾ $d = 1,087 \text{ \AA}$. È probabile che una più esatta valutazione degli integrali (5) e (6) migliori il già notevole accordo fra i due valori. L'energia corrispondente risulta:

$$E_{\min} = -1,41 \text{ V} = -32500 \text{ cal.}$$

⁽¹⁰⁾ J. C. SLATER, "Phys. Rev.", 32, 349 (1928); E. HYLLERAAS, "Z. Physik", 54, 347 (1929).

⁽¹¹⁾ J. C. SLATER, loc. cit.

⁽¹²⁾ R. EISENSCHITZ e F. LONDON, "Z. Physik", 60, 491 (1930).

⁽¹³⁾ Y. SUGIURA, "Z. Physik", 45, 484 (1927).

⁽¹⁴⁾ W. HEITLER e F. LONDON, loc. cit.

⁽¹⁵⁾ W. E. CURTIS e A. HARVEY, loc. cit.

Mancano in proposito dati sperimentali, e dobbiamo riguardare il valore ora citato della affinità chimica come un limite inferiore. Raccogliendo tutti gli errori del metodo nelle parole “forze di polarizzazione” si trova che queste dipendono per nuclei molto lontani dal potenziale

$$-\alpha \frac{e^2}{2R^4}$$

essendo $\alpha = 0,20 \cdot 10^{-24}$ la polarizzabilità dell'atomo neutro di elio, e se ammettiamo che tale espressione sia ancora press'a poco valida alla distanza (vera) di equilibrio, ciò che è assai dubbio, troviamo come valore presumibile dell'affinità chimica:

$$-E = 2,4 \text{ V} = 55000 \text{ cal.}$$

Possiamo infine calcolare il quanto iniziale d'oscillazione da

$$n = \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\frac{1}{M_r} \left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0}$$

essendo $M_r = \frac{1}{2} M_{\text{He}} = 3,30 \cdot 10^{-24}$ la massa ridotta dell'oscillatore, e $\left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0$ la derivata seconda della curva potenziale nel punto di equilibrio. Poiché il calcolo dà $\left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0 = 3,03 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^2$ troviamo

$$n = 1610 \text{ cm}^{-1}$$

in accordo casualmente perfetto con il valore determinato sperimentalmente⁽¹⁶⁾, $n = 1628 \text{ cm}^{-1}$, del primo quanto di oscillazione.

* * *

Ringrazio vivamente il Prof. E. FERMI che mi è stato largo di preziosi consigli e aiuti. Ringrazio anche il Dott. G. GENTILE per l'interesse con cui ha seguito questo lavoro.

⁽¹⁶⁾ W. WEIZEL, “Z. Physik”, 56, 727 (1929); W. E. CURTIS e A. HARVEY, loc. cit.

Commento alla Nota Scientifica n. 2: "Sulla formazione dello ione molecolare di elio".

Il secondo articolo pubblicato da Ettore Majorana nel 1931 riguarda il problema del legame chimico che, a quell'epoca, cominciava ad essere considerato. Infatti, questo lavoro appare soli quattro anni dopo la pubblicazione di un famoso articolo di Heitler e London (1927) sulla formazione della molecola di idrogeno (H_2) che rappresenta, essenzialmente, la prima descrizione quantomeccanica del legame chimico.

Sebbene l'approccio usato da Majorana, come egli stesso asserisce, è simile al metodo di Heitler e London, il suo studio sullo ione molecolare He_2^+ è molto più intrigante del caso dell' H_2 . Infatti, la costruzione degli stati quantici risulta più complessa sia per il maggior numero di elettroni che per la richiesta di soddisfare al principio di esclusione di Pauli. Il numero atteso di termini è $N!$ (essendo N il numero di elettroni), perciò sei nel caso dell' He_2^+ (vedi Eq. (1) della nota originale). L'approccio di Majorana è quello di considerare l'interazione tra un atomo di elio neutro ed il suo ione ($He + He^+$). Per Majorana appare chiaro che una descrizione classica basata sulle sole forze di polarizzazione è inadeguata per spiegare l'affinità chimica. La ragione più profonda, come Majorana suppone, deve essere trovata nel carattere quantistico degli elettroni, e, in particolare, nella loro indistinguibilità. Majorana dice: *"Per spiegare l'affinità chimica tra He e He^+ dobbiamo invece togliere la restrizione posta e lasciare libero l'atomo neutro, di ceder quando voglia, un elettrone all'atomo ionizzato e di assumerne quindi le veci"*.

L'idea dello scambio è importante non solo per questo fondamentale problema del legame chimico: esso verrà mutuato in un contesto molto diverso riguardante le forze nucleari (forze di scambio). Majorana traduce il suo concetto in un linguaggio quantomeccanico costruendo appropriate autofunzioni in accordo con le proprietà di simmetria del sistema investigato. Majorana inizia con una semplice descrizione in termini di due specie non-interagenti (lontane): He e He^+ . Le funzioni d'onda sono quelle che descrivono un atomo neutro ed il suo ione. Quando i due nuclei si avvicinano diventa necessario considerare la loro reciproca interazione. In queste condizioni le regole della meccanica quantistica giocano un ruolo cruciale perchè la funzione d'onda elettronica totale deve possedere una definita simmetria rispetto al punto medio della distanza tra i due nuclei. In modo del tutto simile al problema dell' H_2 anche in questo caso si originano due stati: lo stato $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2 \Sigma$ corrispondente all'orbitale molecolare legato dell' He_2^+ e lo stato $1s\sigma (2p\sigma)^2 {}^2\Sigma$ che, invece, non presenta un minimo e risulta pertanto repulsivo a tutte le distanze internucleari. È interessante notare che, sebbene l'energia media di questi due stati sia piuttosto simile al valore imperturbato, l'energia di gap è *"... di un ordine di grandezza maggiore della energia dovuta alle forze repulsive di valenza"*.

Allo scopo di calcolare la distanza di equilibrio, la relativa energia, e la frequenza di oscillazione, Majorana fa uso del principio variazionale. A tale riguardo è impressionante come egli maneggi le funzioni d'onda cercando una espressione approssimata ma allo stesso tempo con un significato fisico. Per esempio, egli fa uso di funzioni idrogenoidi ma introduce un effetto di schermaggio mediante un numero efficace della carica nucleare. I lavori di Majorana sono solitamente fortemente connessi ad osservazioni sperimentali —anche le motivazioni che hanno mosso questo lavoro prendono spunto da fatti sperimentali non ben interpretati (la struttura a banda dello spettro di emissione dell'elio)— ed i calcoli finali sono scrupolosamente confrontati con accurati dati sperimentali riportati in letteratura.

ANTONIO SASSO
Università di Napoli

On the formation of molecular helium ion^(*)

ETTORE MAJORANA

Summary. — The stability of the ion He_2^+ ^(**) can be studied even quantitatively with the method of HEITLER and LONDON. The results agree with the available experimental data. It appears that this compound is analogous to H_2 even though the external electron is in a different state and the internal electrons do not only have the effect of screening the nuclear charges but instead contribute effectively to the molecular construction.

The observation of WEIZEL and PESTEL⁽¹⁾, CURTIS and HARVEY⁽²⁾ and of others of the band spectrum of helium have proved that some molecular constants (oscillation quantum, moment of inertia) tend, for the higher states of the optical electron, to certain limits that can naturally be attributed to the corresponding quantities of the ion He_2^+ . This proves the possible existence, at least in the ground state, of this ion to which we can⁽³⁾ assign the configuration $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2 \Sigma$. Since, according to recent conclusions by W. WEIZEL⁽⁴⁾, it is plausible to believe that the neutral molecule is formed from an

(*) Translated from "Il Nuovo Cimento", vol. 8, 1931, pp. 22-28, by P. Radicati di Brozolo.

(**) In "Il Nuovo Cimento" it is printed He_2 instead of He_2^+ . (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

⁽¹⁾ W. WEIZEL and E. PESTEL, "Z. Physik", 56, 97 (1929); W. WEIZEL, "Z. Physik", 56, 727 (1929).

⁽²⁾ W. WEIZEL, "Z. Physik", 56, 727 (1929).

⁽³⁾ W. WEIZEL, "Z. Physik", 59, 320 (1930).

⁽⁴⁾ W. WEIZEL, "Z. Physik", 59, 320 (1930).

atom in the ground state and one in an excited state, we can conclude that the ion dissociates either by high energy oscillation quanta or by an adiabatic increase of the distance between the nuclei if, as we intend to do, we consider them as fixed in a neutral atom and in an ionized one, both in the ground state⁽⁵⁾. In this paper we want to study the reaction $\text{He} + \text{He}^+$ from the energy point of view and prove that such a reaction may lead to the formation of the molecular ion. The first order of approximation leads, both for the equilibrium distance of the nuclei and for the oscillation quanta, to values in fairly good agreement with the experimental data. The method we will follow is the one that has been originally applied by HEITLER and LONDON⁽⁶⁾ to the study of the hydrogen molecule. We shall assume that the electronic eigenfunctions of the molecule are linear combinations of the eigenfunctions belonging to the separate atoms and we shall use them to evaluate the average value of the interaction between the two atoms. However since the two nuclei have the same charge whereas only one of the atoms is ionized, the problem as we will show is mechanically rather different from the one discussed by HEITLER and LONDON and in general from the problem that one encounters in the normal theory of the omeopolar valence⁽⁷⁾.

1. Let us suppose that the distance between the two atoms is large and let us for the moment disregard the fact that the state in which the first atom is neutral and the second ionized and the state in which the first atom is ionized and the second neutral have the same energy and should therefore be considered together in a perturbation calculation. If we consider the *first* atom neutral and the *second* ionized, the problem is similar to that of the reaction⁽⁸⁾ $\text{He} + \text{H}$; thus, since He is in a closed electronic shell, there is a unique mode of reaction. This means that the interaction between the two atoms does not arise from a separation of the terms (which satisfy PAULI's principle); moreover the resonance forces are certainly repulsive. It is true that the polarization attractive forces are in our case different from those acting between neutral atoms; indeed whereas the first forces arise from a potential decreasing at large distances like R^{-4} , the second instead vanish more rapidly since they depend upon a potential that varies as R^{-6} . However the polarizability of the neutral He atom is very small and therefore by no means the polarization forces can alone give rise to a stable binding. To explain the chemical affinity between He and He^+ we must instead abandon the condition stated at the beginning and let the neutral atom free to share an electron with the ionized one and thus take its place. The net effect is to split the term resulting from the union of the

⁽⁵⁾ Cfr. F. HUND, "Z. Physik", 63, 719 (1930).

⁽⁶⁾ W. HEITLER and F. LONDON, "Z. Physik", 44, 455 (1927).

⁽⁷⁾ F. LONDON, "Z. Physik", 46, 455 (1927); 50, 24 (1928). W. HEITLER, "Z. Physik", 46, 47 (1927); 47, 835 (1928). For a comprehensive review see, e.g., W. HEITLER, "Phys. Z.", 31, 185 (1930). E. A. HYLLERAAS in the study of the reaction between differently excited hydrogen atoms has found further degeneration deriving from the equality of the nuclei, "Z. Physik", 51, 150 (1928).

⁽⁸⁾ Cfr. G. GENTILE, "Z. Physik", 63, 795 (1930).

two atoms, almost without changing its average value. The splitting thus depends not upon the resonance of the electrons but rather on the behaviour of the eigenfunctions under reflection with respect to the center of the molecule. The eigenfunctions may be unchanged under the above *spatial inversions* in which case we call them *even*, or may change sign, in which case we call them *odd*. We could perhaps speak of *resonance* of the nuclei, but only metaphorically and not in the proper meaning which is different, as here we consider only the electronic eigenfunctions. The splitting of the term originating from its even or odd parity is greater by an order of magnitude than the energy due to the repulsive *valence* forces. One of the two modes of reaction thus corresponds to repulsion and does not give rise to chemical binding whereas the other gives rise to an attractive force and leads to the formation of a molecular ion. We can recognize the two modes of reaction with the following considerations. Since we are dealing with three electrons we can require that two of them, which we call electron 1 and electron 2, have parallel spins. Therefore their eigenfunction must be antisymmetric in the coordinates of the first two electrons in such a way that when the nuclei are very far apart one of the electrons is certainly close to the nucleus (a) and the other close to the other nucleus (b), and they can only exchange their place simultaneously. In this case the eigenfunction in its dependence on the first two electrons changes sign. It thus follows that the electrons 1 and 2 give rise together to an odd term described by an eigenfunction that changes sign under spatial inversion. However the only individual states to be considered are those arising from the states $1s$ of the separate atoms, *i.e.* $1s\sigma$ and $2p\sigma$, the first being even and the second odd, and the electrons 1 and 2 are thus an electron $1s\sigma$ and a $2p\sigma$ one (or viceversa).

To the third electron we can assign an even eigenfunction ($1s\sigma$) or an odd one ($2p\sigma$), respectively resulting from the sum or the difference of the eigenfunctions of the separate atoms. In the first case we obtain the overall configuration $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2 \Sigma$, *i.e.* the configuration that belongs to the ground state of He_2^+ and actually corresponds to an attraction between the two atoms. In the second case we would find instead the configuration $1s\sigma(2p\sigma)^2 \Sigma$ that belongs to an excited level of He_2^+ which is probably unstable and gives rise to the other mode of reaction, *i.e.* that leading to repulsion. We thus conclude that the essential cause of the instability of He_2^+ is the same which gives rise to the stability of the molecular ion of hydrogen.

2. Let us call Φ and φ the eigenfunctions of the neutral and ionized atom (a) and similarly Ψ and ψ those of atom (b). The six unperturbed eigenfunctions of the separate atoms, obtained by permutations of the electrons and exchange of the nuclei, are the following:

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 = \varphi_1 \Psi_{23}, & B_1 = \psi_1 \Phi_{23}, \\ A_2 = \varphi_2 \Psi_{31}, & B_2 = \psi_2 \Phi_{31}, \\ A_3 = \varphi_3 \Psi_{12}, & B_3 = \psi_3 \Phi_{12}. \end{cases}$$

The interaction of the atoms splits the six-time-degenerate term by separating the

correct zeroth approximation eigenfunctions according to the symmetry characters⁽⁹⁾ of the electrons and according to their behaviour under spatial inversion. If we denote with + the even terms and with - the odd ones, the only symmetries are the following:

$$(\overline{123})^+, (\overline{123})^-, (\underline{123})^+, (\underline{123})^-.$$

Correspondingly one obtains four terms: the first two are singlets and the last two doublets arising from a hidden degeneracy. PAULI'S principle leads to exclude the first two as they are symmetric in the three electrons; the only remaining ones are the third term which, because of its parity, corresponds to the configuration $1s\sigma(2p\sigma)^2{}^2\Sigma$, and the fourth which is for us the most interesting as it leads to the formation of He_2^+ and therefore to the configuration $(1s\sigma)^2 2p\sigma^2\Sigma$. The eigenfunctions of the four terms are, apart from a normalization factor:

$$(2) \quad \begin{cases} (\overline{123})^+ & y_1 = A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3, \\ (\overline{123})^- & y_2 = A_1 + A_2 + A_3 - B_1 - B_2 - B_3, \\ (\underline{123})^+ & y_3 = A_1 - A_2 + B_1 - B_2, \\ (\underline{123})^- & y_4 = A_1 - A_2 - B_1 + B_2, \end{cases}$$

where we have chosen for the third and fourth term the eigenfunction antisymmetric in 1 and 2. The perturbation function is of course different for each of the unperturbed states (1) as the electrons do not appear symmetrically in the Hamiltonian of the ideally separated atoms. We thus obtain six different Hamiltonians depending on the configuration of the electrons when the atoms are separate, and only one, symmetric, when the atoms are united. In the configuration A_1 the perturbation energy is for instance expressed by

$$H = \frac{4e^2}{R} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{13}} - \frac{2e^2}{r_{1b}} - \frac{2e^2}{r_{2a}} - \frac{2e^2}{r_{3a}},$$

where R , r_{12} , r_{13} , r_{1b} , r_{2a} , r_{3a} , are the distances of the nucleus and of the electron of the first atom from the nucleus and from the electrons of the second. The variation of a generic eigenvalue is given in first approximation by the symbolic expression

$$(3) \quad E_i = \frac{\int \bar{y}_i H y_i d\tau}{\int \bar{y}_i y_i d\tau} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

One should notice that H acts differently, as said, on the various terms which build up

⁽⁹⁾ F. HUND, "Z. Physik", 43, 788 (1927).

every y_i according to (2). Explicitly the result (3) is

$$(4) \quad \begin{cases} E_1 = \frac{I_0 + 2I_1 + 2I_2 + I_3}{1 + 2S_1 + 2S_2 + S_3}, \\ E_2 = \frac{I_0 - 2I_1 + 2I_2 - I_3}{1 - 2S_1 + 2S_2 - S_3}, \\ E_3 = \frac{I_0 - I_1 - I_2 + I_3}{1 - S_1 - S_2 + S_3}, \\ E_4 = \frac{I_0 + I_1 - I_2 - I_3}{1 + S_1 - S_2 - S_3}, \end{cases}$$

where

$$(5) \quad S_1 = \int B_2 A_1 d\tau; \quad S_2 = \int A_2 A_1 d\tau; \quad S_3 = \int B_1 A_1 d\tau;$$

$$(6) \quad \begin{aligned} I_0 &= \int A_1 H A_1 d\tau; & I_1 &= \int B_2 H A_1 d\tau; & I_2 &= \int A_2 H A_1 d\tau; \\ & & I_3 &= \int B_1 H A_1 d\tau. \end{aligned}$$

If the nuclei are sufficiently (but not exceedingly) distant all the integrals I are negative and the S positive and for the order of magnitude we have:

$$\begin{aligned} -I_1 &> -I_2 > -I_3, \\ S_1 &> S_2 > S_3. \end{aligned}$$

In the relations (4) we can disregard the differences between the denominators, which for large distances are close to one, as well as I_3 . Then the main contributions to the energy come from the "electrostatic energy" I_0 , which is common to all terms, including those not obeying Pauli's principle, and can be neglected owing to its small value, and from combinations of the "exchange energy" I_2 , corresponding to valence forces, and the larger symmetry energy I_1 , arising from the behaviour of each term under spatial inversion. Considering the solutions y_3^* and y_4 , the only ones that have a physical meaning, and taking into account the order of magnitude and the sign of I_1 and I_2 , we indeed find that y_3^* gives rise to repulsion whereas y_4 leads to formation of a molecule.

From now on we will consider only y_4 .

3. The evaluation of E_4 as a function of the distance, *i.e.* the determination of the so-called potential curve of the molecule He_2^+ , requires the evaluation of the integrals (5) and (6). The eigenfunction of the neutral atom of helium in its ground state has been

(*) In "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed y_8 . (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

calculated numerically with great accuracy but does not have a simple analytical expression⁽¹⁰⁾. Therefore we need to use rather simplified unperturbed eigenfunctions. For example, we could assume, as commonly done, for the helium ground state the product of two hydrogen-like eigenfunctions with an effective Z equal to $1.6 \div 1.7$, depending on the criterium used for the evaluation; if we want to optimize (minimize) the average energy, we must then set $Z = 2 - \frac{5}{16} = 1.6875$; if instead we want that the diamagnetic constant be in agreement with the experimental value and at the same time with the value provided by accurate theoretic calculations⁽¹¹⁾, we must set $Z = 1.60$. However more serious uncertainties are inherent to the nature of the method adopted, which can only lead to a first and rather rough approximation. Indeed HEITLER and LONDON's⁽¹²⁾ method is inaccurate when the atoms are very far apart not only because it neglects the polarization forces, that in our case predominate, but also because it leads to resonance forces that are wrong both in the order of magnitude and *in the sign*. For example, in the case of the hydrogen molecule discussed by HEITLER and LONDON, the exchange energy is positive for very large distances because SUGIURA's integral⁽¹³⁾ is larger than all the others. This would suggest that the antisymmetric solution is deeper than the symmetric one. This however must be excluded on the basis of very general theorems⁽¹⁴⁾ and the apparent contradiction simply indicates the roughness of the method. For distances of the order of the equilibrium distance it is plausible that the perturbed eigenfunctions are considerably different from the unperturbed ones, so that the first approximation is nothing but an indicative value. For these reasons we have used a model that may appear too crude and that could only be improved with long calculations of doubtful significance. We have therefore assumed for the eigenfunctions of each single atom, hydrogen-like functions corresponding to the same $Z = 1.8$, both for the neutral and the ionized atom. The integrals (5) and (6) become then well-known elementary integrals, one of them being the one already mentioned given by SUGIURA. We thus find that the potential curve has a minimum when the distance between the nuclei is

$$d = 1.16$$

to be compared with the experimental value⁽¹⁵⁾ $d = 1.087 \text{ \AA}$. It is likely that a more exact calculation of the integrals (5) and (6) can improve the already remarkable agreement between the two values. The corresponding energy is

$$E_{\min} = -1.41 \text{ V} = -32500 \text{ cal.}$$

⁽¹⁰⁾ J. C. SLATER, "Phys. Rev.", *32*, 349 (1928); E. HYLLEAAS, "Z. Physik", *54*, 347 (1929).

⁽¹¹⁾ J. C. SLATER, loc. cit.

⁽¹²⁾ R. EISENSCHITZ and F. LONDON, "Z. Physik", *60*, 491 (1930).

⁽¹³⁾ Y. SUGIURA, "Z. Physik", *45*, 484 (1927).

⁽¹⁴⁾ W. HEITLER and F. LONDON, loc. cit.

⁽¹⁵⁾ W. E. CURTIS and A. HARVEY, loc. cit.

In this respect there are no experimental data and we must consider this value of the chemical affinity as a lower limit. Including all the errors of the method under the expression "polarization forces", we find that for very distant nuclei these depend on the potential

$$-\alpha \frac{e^2}{2R^4},$$

where $\alpha = 0.20 \cdot 10^{-24}$ is the polarizability of neutral helium. If we assume this expression to be still approximately valid for the (true) equilibrium distance, which is rather implausible, we find that the chemical affinity is presumably

$$-E = 2.4 \text{ V} = 55000 \text{ cal.}$$

Finally we can calculate the initial oscillation quantum from:

$$n = \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\frac{1}{M_r} \left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0},$$

where $M_r = \frac{1}{2} M_{\text{He}} = 3.30 \cdot 10^{-24}$ is the reduced mass of the oscillator and $\left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0$ is the second derivative of the potential curve at the equilibrium point. Since the calculation gives $\left(\frac{d^2 E}{dR^2} \right)_0 = 3.03 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^2$, we find

$$n = 1610 \text{ cm}^{-1}$$

which is, quite by chance, in perfect agreement with the experimentally determined value⁽¹⁶⁾, $n = 1628 \text{ cm}^{-1}$, of the first oscillation quantum.

* * *

I very much thank Professor E. FERMI who has given me some precious suggestions and help and Dr G. GENTILE for the interest he has shown in this work.

⁽¹⁶⁾ W. WEIZEL, "Z. Physik", 56, 727 (1929); W. E. CURTIS and A. HARVEY, loc. cit.

Comment on the Scientific Paper no. 2: "On the formation of molecular helium ion".

The second paper published by Ettore Majorana in 1931 concerns the question of the chemical bond that at that time was beginning to be posed. Indeed this paper appears only four years after the publication of a famous work by Heitler and London (1927) on the formation of the H_2 molecule, essentially the first quantum-mechanical description on the chemical bond.

Although the approach used by Majorana, as he himself stated, is similar to Heitler and London's method, his study on the molecular ion He_2^+ is quite more intriguing than the case of H_2 . Indeed the construction of the quantum states results more complicated either for the larger number of electrons or for the requirements of the Pauli exclusion principle. The expected number of terms is $N!$ (N being the number of electrons), therefore they are six in the case of He_2^+ (see Eq. (1) of the original paper). Majorana feels that the right approach is to consider the interaction between a helium atom and its ion ($He + He^+$). To him it appears clear that a classical picture solely based on polarization forces is inadequate to explain the chemical affinity. The true reason, as Majorana guesses, has to be found in the quantum character of the electrons, and, in particular, in their indistinguishability. Majorana says: *"To explain the chemical affinity between He and He^+ we must instead abandon the condition stated at the beginning and let the neutral atom free to share an electron with the ionized one and thus take its place"*.

The idea of the *exchange* is important, not only for this fundamental problem of the chemical bond: it will be applied in a completely different context concerning nuclear forces (exchange forces). Majorana translates his concept in a quantum-mechanical language by constructing appropriate eigenfunctions in accordance with the symmetry properties of the investigated system. Majorana starts with a simple description in terms of two non-interacting (far away) species: He and He^+ . The wave functions are those for a neutral helium atom and its ion. When the two nuclei approach each other it becomes necessary to take into account their reciprocal interaction. Under these conditions the quantum-mechanical rules play a crucial role because the total electronic wave function must show a definite symmetry with respect to the midpoint of the internuclear line. As for the case of H_2 two molecular states are similarly originated: the state $(1s\sigma)^2 2p\sigma \ ^2\Sigma$ corresponding to the bonding molecular orbital of He_2^+ and the state $1s\sigma(2p\sigma)^2 \ ^2\Sigma$ which, in contrast, has no minimum and is repulsive at all internuclear distances. It is interesting to note that, although the average energy of these two states is quite close to the unperturbed value, the energy gap is *"greater by an order of magnitude than the energy due to the repulsive valence forces"*.

In order to calculate the equilibrium distance, the corresponding energy difference, and the oscillation frequency, Majorana makes use of the variational principle. With regard to this point, it is impressive how Majorana handles the wave functions searching for easier but at the same time physically meaningful expressions. For instance, he makes use of hydrogenoid functions but introduces a screening effect by means of an effective nuclear charge. Majorana's works are usually strongly connected to experimental observations —also the motivations that inspired this paper originate from a not well interpreted experimental phenomenon (the band structure in the helium emission spectrum)— and his final calculations are compared scrupulously to very accurate experimental data available in the literature.

ANTONIO SASSO
Università di Napoli

I presunti termini anomali dell'elio

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Il Nuovo Cimento”, vol. 8, 1931, pp. 78-83.

Sunto. — Due nuove righe dell'elio mettono capo secondo P. GERALD KRÜGER ai termini anomali $(2p)^2\ ^3P_{012}$ e $(2s)^2\ ^1S_0$. Il calcolo dell'energia e considerazioni di stabilità parlano a favore della prima interpretazione. La spiegazione della seconda riga è invece certamente erronea per ragioni energetiche, e appare inoltre improbabile che questa riga sia dovuta all'elio atomico.

Un notevole lavoro di KRÜGER⁽¹⁾ ha portato alla scoperta di due nuove righe dell'elio, $\lambda = 320,4 \text{ \AA}$ e $\lambda = 357,5 \text{ \AA}$, le quali non sono combinazioni di termini conosciuti. L'Autore interpreta la prima come transizione dal termine normale $1s2p\ ^3P_{012}$ a un termine accentato $2p2p\ ^3P_{012}$ donde sorgerebbe un vero gruppo pp' analogo a quelli noti in Zn, Cd e Hg ma qui di difficile risoluzione perché troppo serrato; per la seconda suggerisce $1s2s\ ^1S_0$ - $2s2s\ ^1S_0$. Entrambi questi presunti nuovi termini $2p2p\ ^3P_{012}$ e $2s2s\ ^1S_0$ sono assai più alti del limite normale di He ed è quindi energeticamente possibile la ionizzazione spontanea (effetto AUGER) di atomi che si trovino in tali stati, liberandosi un elettrone con determinata energia cinetica e cadendo l'altro nell'orbita $1s$. Tuttavia non è sempre sufficiente che l'energia di un termine cada nel campo dello spettro continuo perché abbia luogo l'effetto AUGER, con conseguente riduzione della vita dello stato quantico e indeterminazione dell'energia; possono in certi casi ostare ragioni di simmetria che vietano

(¹) P. GERALD KRÜGER, “Phys. Rev.”, 36, 855 (1930).

rigorosamente transizioni da termini *negativi*, cioè più alti del potenziale di ionizzazione a termini dello spettro continuo, se per la conservazione dell'energia si deve richiedere che essi corrispondano a un elettrone libero e allo ione in uno stato *determinato*.

È questo appunto il caso per il termine $2p2p^3P_{012}$ dell'elio e in genere per la massima parte dei termini anomali negativi fin qui osservati e la cui interpretazione non è controversa. Al contrario il termine $2s2s^1S_0$ di cui KRÜGER postula l'esistenza, dovrebbe dar luogo ad un effetto AUGER assai marcato, il cui ordine di grandezza è stato stimato da WENTZEL⁽²⁾ e particolarmente da FUES⁽³⁾, e tale da rendere perfettamente osservabile l'allargamento del termine, o meglio estremamente difficile l'individuazione spettroscopica di quest'ultimo. Questa obbiezione contro l'osservabilità del termine $2s2s^1S_0$ dell'elio non è peraltro decisiva; in realtà i due termini $2s2s^1S_0$, e $2p2p^1S_0$, che hanno gli stessi caratteri di simmetria, non esistono separatamente nell'elio perché la loro mutua influenza è dell'ordine di grandezza della loro separazione e tale sarebbe in qualunque atomo del tipo di elio, anche per $Z \rightarrow \infty$. Come combinazione di $2s2s^1S_0$ e $2p2p^1S_0$ risultano due termini (nel seguito chiamati X e Y) il più profondo dei quali (X) derivando in modo prevalente da $2s2s^1S_0$ può assai impropriamente indicarsi con lo stesso simbolo; l'interazione dei due elettroni in questo stato è anormalmente piccola poiché anche in approssimazione nulla (per $Z \rightarrow \infty$) essi tendono a stare in posizioni diametralmente opposte rispetto al nucleo, ed è bene possibile che l'effetto AUGER sia qui assai più debole di quello calcolato da FUES per l'inesistente termine $2s2s^1S_0$.

Ma contro l'interpretazione proposta da KRÜGER per la riga $\lambda = 375,5$ stanno obiezioni di altra natura; le considerazioni che seguono tendono anzi ad escludere che questa riga sia dovuta all'elio atomico, poiché la spiegazione $1s2s^1S_0-2s2s^1S_0$ è inammissibile per ragioni energetiche, e le altre poche che si possono immaginare compatibilmente con la frequenza della riga sono inverosimili per diverse ragioni. Al contrario nessuna obbiezione può muoversi all'interpretazione della $\lambda = 320,4$ come $1s2p^3P_{012}-2p2p^3P_{012}$; anche il valore teorico dell'energia di $2p2p^3P_{012}$ che si calcola facilmente con un errore stimato dell'1% si accorda perfettamente con quello sperimentale.

1. Se si trascura l'interazione e le correzioni di relatività e si prescinde dalle variabili di *spin*, da due orbite di quanto totale 2 deriva in campo coulombiano un termine multiplo 16 volte, poiché ogni elettrone può porsi nelle orbite $2s$ o $2pm$ ($m = 1, 0, -1$); la matrice di perturbazione dovuta all'interazione si lascia spezzare in matrici di grado 1 e 2, poiché possiamo separare a priori stati con simmetria differente. Si possono così costruire razionalmente come combinazione delle autofunzioni imperturbate quelle degli stati $2s2p^3P$, $2s2p^1P$, $2p2p^1D$, $2p2p^3P$, $2p2p^1S$, $2s2s^1S$ e per tutti i valori permessi del quanto magnetico; ad eccezione degli ultimi due tutti questi stati hanno qualche carattere di simmetria diverso rispetto allo scambio degli elettroni (singoletti e tripletti) o alle rotazioni spaziali (quanto azimutale) o assiali (quanto magnetico) o alla riflessione

⁽²⁾ G. WENTZEL, "Z. Physik", 43, 524 (1927).

⁽³⁾ E. FUES, "Z. Physik", 43, 726 (1927).

nel centro di forza (termini pari e dispari).

Gli ultimi due, $2p2p^1S$ e $2s2s^1S$ hanno invece la stessa simmetria. Corrispondentemente si otterranno da un'equazione quadratica le autofunzioni corrette e gli autovalori di prima approssimazione di due stati X e Y che sono combinazioni lineari di $2s2s^1S$ e $2p2p^1S$ mentre gli autovalori degli altri stati sono esprimibili razionalmente mediante gli elementi della matrice di perturbazione.

Per un atomo di numero Z con due soli elettroni nelle orbite suddette l'energia è in approssimazione nulla: $\frac{W}{Rh} = -2\frac{Z^2}{2^2} = -\frac{Z^2}{2}$, in prima approssimazione sarà $\frac{W}{Rh} = -\frac{Z^2}{2} + aZ$ poiché l'interazione cresce come Z . La seconda approssimazione può in parte valutarsi con il metodo della variazione dell'unità di lunghezza⁽⁴⁾ che è qui equivalente all'assunzione di autofunzioni del tipo idrogeno con un opportuno Z^* ; con questo metodo otteniamo in generale per i termini che ci interessano, in luogo di $\frac{W}{Rh} = -\frac{Z^2}{2} + aZ$ l'espressione più corretta:

$$(1) \quad \frac{W}{Rh} = -\frac{Z^2}{2} + aZ - \frac{a^2}{2},$$

che corrisponde a $Z^* = Z - a$. I valori di a e i termini calcolati secondo la (1) per l'elio e riferiti all'atomo doppiamente ionizzato sono:

	a	$v \text{ cm}^{-1}$
(2)	$Y^1S \quad \frac{47 + \sqrt{241}}{128}$	125300
	$2s2p^1P \quad \frac{49}{128}$	143500
	$2p2p^1D \quad \frac{237}{640}$	145700
	$2p2p^3P \quad \frac{21}{64}$	153300
	$2s2p^3P \quad \frac{17}{64}$	165000
	$X^1S \quad \frac{47 - \sqrt{241}}{128}$	168800.

Prima di discutere la precisione di questo metodo dobbiamo premettere alcune considerazioni sulla stabilità dei termini, poiché termini instabili non appartengono a livelli energetici esattamente determinati. Negli atomi complessi i termini possono dividersi in due classi da tempo riconosciute sperimentalmente, poiché per i passaggi radiativi fra termini appartenenti alla stessa classe vale la regola di selezione $\Delta L = \pm 1$, mentre per le intercombinazioni $\Delta L = 0$ (regola di LAPORTE nel caso di accoppiamento normale).

⁽⁴⁾ Cfr. V. FOCK, "Z. Physik", 63, 855 (1930).

I termini della prima classe (termini *normali* nel senso di WIGNER⁽⁵⁾) sono pari o dispari (cioè non cambiano o cambiano segno per riflessione nel nucleo) secondo che L è pari o dispari; i termini della seconda (termini *riflessi*, secondo WIGNER) sono pari con quanto azimutale dispari o dispari con quanto azimutale pari. Nell'idrogeno o in atomi con più elettroni, se tutti ad eccezione di uno si trovano in orbite s , sono presenti soltanto termini *normali* nel senso spiegato. I termini della tabella (2) se sono instabili devono dar luogo a transizioni spontanee a stati con un elettrone in un'orbita iperbolica e l'altro nello stato fondamentale $1s$ e quindi a stati con simmetria normale; e poiché senza intervento della radiazione i caratteri di simmetria sono inalterabili dipendendo da costanti del movimento, concludiamo che dei termini (2) sono stabili i termini riflessi, instabili per effetto AUGER i termini normali, almeno nell'approssimazione non relativistica.

Ora il solo termine riflesso fra quelli riportati nella tabella è il termine $2p2p^3P$ che è pari e ha quanto azimutale dispari, e in conseguenza è il solo che abbia un'energia rigorosamente determinata, sempre a prescindere dall'accoppiamento con il campo di radiazione; tutti gli altri termini hanno una larghezza apprezzabile dell'ordine presumibile di alcune centinaia di cm^{-1} .

2. La precisione della (1) è differente per i vari termini considerati. Per il termine $2p2p^3P$ che è il più profondo dei termini riflessi, la determinazione dell'energia con metodi variazionali è un problema di minimo assoluto se le funzioni approssimanti hanno la giusta simmetria; segue che il valore del termine riportato in (2) rappresenta un limite inferiore e possiamo presumere che l'errore relativo non sia molto diverso da quello che si commette calcolando con lo stesso metodo il termine fondamentale $1s1s^1S$, poiché si tratta in entrambi i casi di due elettroni in orbite equivalenti di quanto radiale nullo e inoltre il valore relativo dell'interazione rispetto alla grandezza del termine e conseguentemente la correzione relativa dovuta alla variazione dell'unità di lunghezza sono nei due casi poco diversi. Ora per lo stato fondamentale si trova con questo metodo $-\frac{W}{Rh} = \frac{729}{128} = 5,695$ mentre empiricamente, e anche teoricamente secondo i calcoli di HYLLERAAS, $-\frac{W}{Rh} = 5,807$ con una differenza di meno del 2%; ammettendo nel nostro caso un errore relativo identico troviamo come valore probabile del termine $2p2p^3P$: 156350 cm^{-1} sotto il limite di He^+ , cifra effettivamente assai prossima al dato sperimentale se l'interpretazione della $\lambda = 320,4$ è corretta (156000 cm^{-1}).

Per quanto riguarda gli altri termini (2) la loro determinazione non è un problema di minimo assoluto perché esistono infiniti stati più profondi e infiniti più elevati aventi gli stessi caratteri di simmetria; per questo può aver luogo una parziale compensazione di errori; oltre a ciò questi termini sono "ottusi" non hanno cioè una energia esattamente determinata e il loro calcolo, come quello che ho tentato per il termine X e che ricorderò più avanti, ha senso solo se non si spinge troppo oltre l'approssimazione. Ritengo che i valori dei termini riportati in (2) oltre a quello di $2p2p^3P$ non siano più errati di qualche migliaio di cm^{-1} per i più profondi (X e $2s2p^3P$) e di non molte migliaia per i più

(5) E. WIGNER, "Z. Physik", 43, 624 (1927).

alti. Stando così le cose l'attribuzione della $\lambda = 357,5$ all'elio diventa problematica. Secondo l'interpretazione proposta da KRÜGER il termine $2s2s^1S$ o meglio il termine X starebbe circa 191000 cm^{-1} sotto il limite di He^+ e questo valore è esageratamente lontano da quello teorico⁽⁶⁾. A fine di esaminare le altre possibili interpretazioni, osserviamo che questa riga per la sua posizione dovrebbe risultare dalla combinazione di un termine ordinario dell'elio neutro e di un termine anomalo; d'altra parte lo spettro discreto dell'elio neutro, escluso lo stato fondamentale che non può entrare in gioco, sta fra circa 439000 e 470000 cm^{-1} sotto il limite di He^+ e poiché la frequenza della riga discussa è di circa 280000 cm^{-1} dovrebbe esserne responsabile un termine anomalo posto fra 159000 e 197000 cm^{-1} sotto il solito limite. Ora i soli che soddisfino a questa condizione fra i termini ricordati, e non è il caso di prenderne in esame altri che derivino da orbite differenti e sono certamente troppo piccoli, sono il termine X e il termine $2s2p^3P$. Che la riga $\lambda = 357,5$ sia combinazione del termine $2s2p^3P$ e di un termine normale è ben poco probabile, poiché l'ultimo dovrebbe avere almeno quanto totale 4 e sarebbe strano che combinazioni con termini più profondi non fossero state osservate; mi limito ad indicare come possibile questa interpretazione se sicuri indizi sorgeranno che questa riga sia dovuta all'elio atomico. Quanto al termine X , esso potrebbe fornire per la spiegazione della $\lambda = 357,5$ una combinazione con un termine normale di quanto totale 3 e la più probabile, perché la sola che soddisfa alle regole di selezione, sarebbe $X-1s3p^1P$; in questa ipotesi il valore del termine X sarebbe di circa 171300 cm^{-1} cioè non eccessivamente discosto da quello indicato nella tabella. Assumendo come autofunzione per lo stato X :

$$[\alpha + \beta(r_1 + r_2) + \gamma r_1 r_2 + \delta(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)]e^{-\varepsilon(r_1 + r_2)}$$

che si riduce all'autofunzione imperturbata per certi valori delle costanti, e determinando invece queste con il metodo variazionale, il valore del termine X risulta di circa 168500 cm^{-1} cioè ben poco diverso da quello calcolato mediante la (1), benché il numero di parametri sottoposti a variazione sia ora notevolmente maggiore, e ancor meno in accordo con l'ipotesi $1s3p^1P-X$. E poiché questa è per suo conto scarsamente verosimile anche per l'assenza della riga $1s2p^1P-X$ e le altre possibili interpretazioni non esaminate partitamente sono anche più decisamente da rigettare, concludiamo che l'attribuzione della riga $\lambda = 357,5$ all'elio è ancora dubbia benché gli accorgimenti sperimentati sembrano garantirla; e non può sostenersi senza ulteriori ricerche.

⁽⁶⁾ Una diversa valutazione riferita dall'Autore non sembra corretta.

Commento alla Nota Scientifica n. 3 : "I presunti termini anomali dell'elio".

In questa Nota, pubblicata su "Il Nuovo Cimento" nel 1931, E. Majorana svolge il calcolo di alcuni livelli doppiamente eccitati dell'atomo di elio. Egli era motivato da un recente lavoro di P. G. Krüger che l'anno precedente aveva osservato delle righe sconosciute e le aveva attribuite allo spettro dell'elio⁽¹⁾. Secondo Krüger, queste righe con lunghezza d'onda di 32,04 nm e 35,75 nm mettevano capo a termini doppiamente eccitati poiché corrispondenti rispettivamente alle transizioni $1s2p\ ^3P - 2p2p\ ^3P$ e $1s2s\ ^1S - 2s2s\ ^1S$.

Majorana considera tutti i livelli dell'elio la cui configurazione elettronica si ottiene da due orbite idrogenoidi con numero quantico principale $n = 2$ e include la mutua interazione dei due elettroni come una perturbazione. I livelli, classificati in base al momento angolare totale, allo spin ed alla parità, sono: $2s2s\ ^1S$, $2s2p\ ^3P$, $2p2p\ ^3P$, $2p2p\ ^1D$, $2s2p\ ^1P$, $2p2p\ ^1S$. In realtà, come Majorana nota esplicitamente, il primo e l'ultimo termine, avendo la medesima simmetria, sono mescolati dall'interazione Coulombiana degli elettroni e danno origine a due termini misti, denominati X e Y . Le energie dei livelli sono valutate mediante un procedimento variazionale e l'errore atteso viene stimato calcolando anche l'energia dello stato fondamentale, che era già nota con precisione dai lavori di Hylleraas. Majorana sapeva bene che nell'elio tutti i livelli doppiamente eccitati si trovano nello spettro continuo, ovvero hanno un'energia superiore allo stato formato dallo ione He^+ e da un elettrone libero. Di conseguenza tutti i livelli doppiamente eccitati hanno energia sufficiente per la ionizzazione spontanea, altrimenti nota come effetto Auger. In generale, i livelli che effettivamente sono passibili di ionizzazione spontanea sono talmente instabili, quindi indeterminati in energia, da non dar luogo a transizioni radiative con righe strette come quelle osservate da Krüger. Facendo ricorso a considerazioni di simmetria, Majorana deduce che solo il livello $2p2p\ ^3P$ è propriamente stabile. Tale termine risulta stabile perché "riflesso", ovvero tale per cui una trasformazione di parità moltiplica la funzione d'onda per $(-1)^{L+1}$ dove L indica il momento angolare totale, invece che per $(-1)^L$ come accade per i termini "normali". In effetti, a meno che non intervenga un campo elettromagnetico, sono proibite le transizioni tra stati "riflessi" e "normali", quali sono gli stati ionizzati. Dello stato $2s2s\ ^1S$ (X) Majorana ipotizza che, anche se instabile, possa avere una vita media molto più lunga degli altri livelli. L'attribuzione di Krüger della riga a 35,75 nm non si può dunque scartare solo perché mette capo al termine $2s2s\ ^1S$ (X) ma richiede un supplemento d'indagine.

⁽¹⁾ P. G. KRÜGER, *Phys. Rev.* **36** (1930) 855.

Per valutare l'identificazione proposta da Krüger, Majorana passa a confrontare i numeri d'onda delle righe con i risultati dei suoi calcoli. Egli ritiene corretta l'attribuzione della riga a 32,04 nm ed improbabile quella della riga a 35,75 nm. Infatti la prima implica che il livello $2p2p\ ^3P$ giaccia 156000 cm^{-1} sotto il limite dell'atomo doppiamente ionizzato He^{++} , in buon accordo con il valore calcolato (156350 cm^{-1}). La seconda attribuzione invece situa il termine $2s2s\ ^1S(X)$ 191000 cm^{-1} al di sotto del limite dell' He^{++} , troppo discosto dal valore di 168800 cm^{-1} ricavato da Majorana. Non trovando termini adeguati, egli anzi dubita che la riga a 35,75 nm appartenga davvero allo spettro dell'elio.

Di questa Nota colpisce come Majorana faccia ricorso alle proprietà di simmetria dei livelli sotto rotazioni, scambio degli elettroni e parità. Un tale approccio, precursore dell'importanza che le simmetrie hanno assunto nella fisica moderna, era certamente insolito nel 1930. Infatti, nell'introduzione al suo fondamentale volume *Gruppentheorie und Quantenmechanik* del 1931 H. Weyl notava come la teoria delle rappresentazioni dei gruppi si stava appena facendo strada nella fisica.

Forse perché pubblicato in italiano, questo articolo di E. Majorana non sembra aver ricevuto l'attenzione che merita dato che solo pochi anni dopo Fender *et al.*⁽²⁾, Ta-You Wu⁽³⁾ e Wilson⁽⁴⁾ affrontano il medesimo problema senza far cenno a Majorana. Fender *et al.* e Wilson raggiungono la medesima conclusione di Majorana riguardo alla riga a 35,75 nm, mentre Wu, sebbene di fronte ad una discrepanza del 3,4%, appoggia parzialmente ("a partial support") l'attribuzione di Krüger^(*). In seguito i livelli doppiamente eccitati sono stati studiati da svariati autori, tra i quali ricordiamo U. Fano che in relazione a tale problema elaborò la sua famosa teoria delle forme di riga di uno stato discreto accoppiato ad un insieme continuo di stati⁽⁵⁾. Recentemente, E. Lindroth ha ricalcolato le energie dei termini considerati da Majorana, trovando valori sistematicamente più in basso, con differenze variabili tra l'1% e il 9%⁽⁶⁾. Le larghezze dei livelli riportate da Lindroth confermano l'ipotesi di Majorana che la vita media del livello $2s2s\ ^1S(X)$ fosse più lunga degli altri, ma essa risulta comunque troppo breve per dar luogo a righe ben definite.

Dopo 75 anni dalla pubblicazione della Nota, osserviamo quanto sia stato condiviso l'interesse di Majorana per lo spettro dell'elio. Nel 1929 il primo fondamentale contributo alla teoria atomica venne da E. Hylleraas, che escogitò uno specifico insieme di funzioni d'onda particolarmente adatto al calcolo variazionale⁽⁷⁾. In seguito, negli anni Sessanta,

⁽²⁾ F. G. FENDER e J. P. VINTI, *Phys. Rev.* **46** (1934) 77.

⁽³⁾ TA-YOU WU, *Phys. Rev.* **46** (1934) 239.

⁽⁴⁾ WM. S. WILSON, *Phys. Rev.* **48** (1935) 536.

^(*) L'anno seguente, nel 1935, Ta-You Wu evidenziò un errore del 19% nei suoi calcoli, corretto il quale, l'accordo con Krüger diventò insostenibile. Ha quindi dell'ironico la circostanza riferita da U. Fano a E. Amaldi, secondo cui il lavoro di Wu era citato di frequente e quello di Majorana ignorato.

⁽⁵⁾ U. FANO, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1866.

⁽⁶⁾ E. LINDROTH, *Phys. Rev.* **49** (1994) 4473.

⁽⁷⁾ E. A. HYLLEAAS, *Z. Phys.* **54** (1929) 347.

C. L. Pekeris e collaboratori diedero nuovo impulso alla determinazione dei livelli, anche grazie all'uso dei computer⁽⁸⁾. Infine, ultimo in ordine di tempo, il lavoro di G. W. F. Drake⁽⁹⁾ ha fatto compiere un ulteriore balzo in avanti alla precisione dei calcoli variazionali, spingendo la precisione degli autovalori dell'equazione di Schrödinger fino a 10^{-15} . Oggi, lungi dall'essersi esaurito, l'interesse per l'elio si concentra su aspetti differenti. Dal momento che l'equazione di Schrödinger si può considerare praticamente risolta, la teoria atomica si focalizza sulle correzioni ai livelli dovute ad effetti relativistici, di rinculo e di elettrodinamica quantistica. Attualmente il compito più arduo consiste nel derivare tutti gli operatori di perturbazione ad ordini successivi nella costante di struttura fine α e nel rapporto m/M tra le masse dell'elettrone e del nucleo. Una volta ottenuti gli operatori, le correzioni ai livelli vengono valutate prendendone i valori di aspettazione rispetto alle funzioni d'onda variazionali dell'equazione di Schrödinger. Le energie così calcolate si confrontano con le frequenze delle transizioni misurate mediante spettroscopia laser con precisione che arriva a 10^{-11} . Inoltre di grande importanza è la struttura fine dei livelli dell'elio. Grazie a numerose cancellazioni, le separazioni di struttura fine sono meno affette da contributi incerti. Dal confronto con le misure, attualmente accurate fino a 0,03 ppm, si prospetta quindi la possibilità di determinare la costante di struttura fine α ⁽¹⁰⁾.

È noto quanto Majorana fosse prudente, addirittura restio, a pubblicare gli esiti del suo lavoro. L'influenza che egli ha saputo esercitare sulla fisica moderna con soli 9 articoli testimonia certo profondità d'ingegno, ma anche lungimiranza. A proposito dell'elio, trattandosi di un sistema non risolvibile esattamente, potremmo parafrasare A. Schwalow, secondo cui una molecola biatomica era una molecola con un atomo di troppo, per dire che due elettroni sono già troppi. A ben vedere però, proprio qui risiede l'origine dell'interesse che questo atomo ha suscitato in E. Majorana e continua a suscitare tuttora nella ricerca teorica e sperimentale.

MASSIMO INGUSCIO
Università di Firenze

FRANCESCO MINARDI
Università di Firenze

⁽⁸⁾ Y. ACCAD, C. L. PEKERIS e B. SCHIFF, *Phys. Rev.* **4** (1971) 516.

⁽⁹⁾ Per una rassegna vedi G. W. F. DRAKE, in *Atomic, Molecular and Optical Physics Handbook*, a cura di G. W. F. Drake (AIP Press, New York) 1996, p. 154, e bibliografia ivi compresa.

⁽¹⁰⁾ P. J. MOHR e B. TAYLOR, *Rev. Mod. Phys.* **77** (2002) 1.

On the possible anomalous terms of helium^(*)

ETTORE MAJORANA

Summary. — According to P. GERALD KRÜGER two new lines of helium originate from the anomalous terms $(2p)^2\ ^3P_{012}$ and $(2s)^2\ ^1S_0$. Energy calculation together with stability considerations favour the interpretation of the first line. The explanation of the second line is almost certainly erroneous for energy reasons and because it appears improbable that this line should be attributed to atomic helium.

A remarkable paper by KRÜGER⁽¹⁾ has led to the discovery of two new lines of helium, $\lambda = 320.4 \text{ \AA}$ and $\lambda = 357.5 \text{ \AA}$, which do not arise from combinations of known terms. The Author interprets the first line as a transition from the normal term $1s2p\ ^3P_{012}$ to a primed term $2p2p\ ^3P_{012}$. From the latter there would arise a true group pp' similar to those that are known in Zn, Cd and Hg; the resolution within the group is difficult because the levels are very close. For the second line the Author suggests the transition $1s2s\ ^1S_0 - 2s2s\ ^1S_0$. Both these suggested new terms $2p2p\ ^3P_{012}$ and $2s2s\ ^1S_0$ have energy higher than the normal limit for He. It is therefore energetically possible that atoms undergo spontaneous ionization (AUGER effect) with emission of an electron having the appropriate kinetic energy whereas the other electron falls into the orbit $1s$. However, for the AUGER effect to occur, it is not always sufficient that the energy of one term lie in the continuous spectrum leading to a reduction of the lifetime of the quantum state and to an uncertainty in the energy. In some cases symmetry considerations may forbid

(*) Translated from "Il Nuovo Cimento", vol. 8, 1931, pp. 78-83, by P. Radicati di Brozolo.

(1) P. GERALD KRÜGER, "Phys. Rev.", 36, 855 (1930).

transitions from *negative* terms (*i.e.* terms higher than the ionization potential) to terms in the continuous spectrum. This may happen if to conserve energy we must require that they correspond to a free electron and to an ion in a *definite* state.

This is the case for the term $2p2p^3P_{012}$ of helium and in general for the largest part of anomalous negative terms that have been observed till now and whose interpretation is not controversial. On the contrary the term $2s2s^1S_0$ postulated by KRÜGER would give rise to an easily observable AUGER effect whose order of magnitude, estimated by WENTZEL⁽²⁾ and in particular by FUES⁽³⁾, would make the widening of the terms perfectly observable or, which is equivalent, would make it extremely difficult to identify spectroscopically the latter. However, the argument against the observability of the term $2s2s^1S_0$ of helium is not totally convincing. In reality the two terms $2s2s^1S_0$ and $2p2p^1S_0$ with the same symmetry do not exist separately in helium because their mutual interaction is of the same order of magnitude as their separation. The situation would remain the same in any helium-like atom even for $Z \rightarrow \infty$. Combining the two levels $2s2s^1S_0$ and $2p2p^1S_0$, we obtain two terms (in the following denoted by X and Y). The lower one (X), coming predominantly from $2s2s^1S_0$ will be denoted with the same symbol. The interaction of the two electrons in this state is abnormally small because even in the zeroth approximation (for $Z \rightarrow \infty$) they tend to remain diametrically opposite with respect to the nucleus. It is quite possible that in this case the AUGER effect be much smaller than the effect calculated by FUES for the non-existing term $2s2s^1S_0$.

Against the interpretation suggested by KRÜGER for the line $\lambda = 375.5$ there are problems of a different nature. Indeed the following considerations tend to exclude that this line should be attributed to atomic helium, since the transition formula is excluded by energy considerations and the few others that one can envisage and are compatible with the line's frequency are unlikely for several reasons. On the other hand, none of these objections contradicts the interpretation of the line $\lambda = 320.4$ as due to the transition $1s2p^3P_{012}-2p2p^3P_{012}$. Also the theoretical value of the energy of $2p2p^3P_{012}$ that can easily be calculated with an error of 1% is in perfect agreement with the experimental observation.

1. If we neglect the interaction and the relativistic corrections and we disregard the spin variables, from two orbits with total quantum number 2, we obtain in a Coulomb field a term with a sixteen-fold degeneracy, since each electron can be in the orbit $2s$ or $2pm$ ($m = 1, 0, -1$). The perturbation matrix due to the interaction can be split into matrices of degree 1 and 2 as we can *a priori* separate states with different symmetry. We can thus reasonably build as combinations of unperturbed eigenfunctions those of the states $2s2p^3P$, $2s2p^1P$, $2p2p^1D$, $2p2p^3P$, $2p2p^1S$, $2s2s^1S$ for all the allowed values of the magnetic quantum. All these states, with the exception of the last two, have at least some different symmetry characters arising from the different behaviour of the

⁽²⁾ G. WENTZEL, "Z. Physik", 43, 524 (1927).

⁽³⁾ E. FUES, "Z. Physik", 43, 726 (1927).

states under the exchange of the electrons (singlets and triplets), or under space rotations (azimuthal quantum) or axial rotations (magnetic quantum), or under reflection in the center of mass (even or odd terms).

The last two terms $2p2p^1S$ and $2s2s^1S$ have instead the same symmetry. Correspondingly, we can get the correct eigenfunctions and the first-approximation eigenvalues from a quadratic equation for the first states X and Y that are linear combinations of $2s2s^1S$ and $2p2p^1S$; the eigenvalues of the other terms can instead be expressed from the elements of the perturbation matrix.

For an atom with charge number Z with only two electrons in the above specified orbits, the energy in the zeroth approximation is $\frac{W}{Rh} = -2\frac{Z^2}{2^2} = -\frac{Z^2}{2}$; in the first approximation it will be $\frac{W}{Rh} = -\frac{Z^2}{2} + aZ$ since the interaction increases as Z . The second approximation can be evaluated with the method of the variation of the unit of length⁽⁴⁾ that is here equivalent to assuming hydrogen-like eigenfunctions with an effective Z^* . With this method we obtain in general for the terms under consideration instead of $\frac{W}{Rh} = -\frac{Z^2}{2} + aZ$ the more correct expression

$$(1) \quad \frac{W}{Rh} = -\frac{Z^2}{2} + aZ - \frac{a^2}{2},$$

which corresponds to $Z^* = Z - a$. The values of a and the terms calculated according to formula (1) for helium corresponding to the doubly ionized atom are:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} & a & v \text{ cm}^{-1} \\ Y^1S & \frac{47 + \sqrt{241}}{128} & 125300 \\ 2s2p^1P & \frac{49}{128} & 143500 \\ 2p2p^1D & \frac{237}{640} & 145700 \\ 2p2p^3P & \frac{21}{64} & 153300 \\ 2s2p^3P & \frac{17}{64} & 165000 \\ X^1S & \frac{47 - \sqrt{241}}{128} & 168800. \end{array} \right.$$

Before discussing the accuracy of this method, we will first discuss the stability of the terms because unstable terms do not belong to well-defined energy levels. The terms of complex atoms can be divided into two classes that are by now experimentally well known. Indeed for radiative transitions between terms belonging to the same class there

⁽⁴⁾ Cfr. V. FOCK, "Z. Physik", 63, 855 (1930).

is a selection rule $\Delta L = \pm 1$ whereas for transitions between different classes the selection rule is $\Delta L = 0$ (this in the case of normal coupling is LAPORTE selection rule). Terms belonging to the first class (that WIGNER calls *normal*⁽⁵⁾) are even or odd (*i.e.* they do not or they do change sign under reflection in the nucleus) for even or odd L . Terms in the second class (*reflected* terms according to WIGNER) are even when the azimuthal quantum is odd or odd for even azimuthal quantum. In hydrogen or in atoms with many electrons, if all but one are in s orbits, all terms are, according to the above definition, *normal*. If the terms listed in table (2) are unstable they give rise to spontaneous transitions to states with an electron in a hyperbolic orbit and another electron in the ground state $1s$, hence to states with normal symmetry. Since, when there is no radiation, the symmetry characters are unchangeable as they depend on constants of the motion, we conclude that the only stable terms listed in (2) are the reflected ones, whereas the normal terms are unstable for AUGER effect at least in the non-relativistic approximation.

The only reflected term among those in the table is $2p2p^3P$ which is even with odd azimuthal quantum. It is therefore the only one with well-defined energy provided, of course, we disregard the coupling with the radiation field; all the other terms have a width presumably of the order of some hundreds cm^{-1} .

2. The precision of formula (1) is different for the various terms we have considered. For the term $2p2p^3P$, which is the lowest among the reflected ones, the determination of the energy by variational methods is a problem of absolute minimum when the approximating functions have the right symmetry. It follows that the value of the term we consider that appears in (2) represents a lower limit and we can assume that its error does not differ appreciably from the error that one finds if we calculate the ground term $1s1s^1S$ with the same method. Indeed in both cases the two electrons are in equivalent orbits with zero radial number. Moreover, the relative value of the interaction compared with the value of the term and consequently the relative correction due to the variation of the unit of length differ but little in the two cases. With this method we find that the value of the ground state is $-\frac{W}{Rh} = \frac{729}{128} = 5.695$, whereas the empirical value and the theoretical one obtained by HYLLERAAS is $-\frac{W}{Rh} = 5.807$, the difference being less than 2%. If we assume in our case an identical relative error, the energy of the term $2p2p^3P$ is 156350 cm^{-1} below the limit of He^+ . This figure is very close to the experimental one if the interpretation of the line $\lambda = 320.4$ is correct (156000 cm^{-1}).

The determination of the other terms listed in (2) is not a problem of absolute minimum since there exist an infinite number of lower states and an infinite number of higher states with the same symmetry. This may lead to a partial compensation of the errors. Moreover, these terms are "obtuse", *i.e.* their energy is not exactly defined and their calculation, as the one I attempted for the term X that I will recall later on, is meaningful only if we do not push the approximation too far. I believe that the errors on the values that are listed in (2) beside that for $2p2p^3P$ do not exceed a few thousands cm^{-1}

(5) E. WIGNER, "Z. Physik", 43, 624 (1927).

in the case of the deepest ones (X and $2s2p^3P$) and several thousands in the case of the highest ones. To attribute the line $\lambda = 357.5$ to helium is thus rather problematic. According to the interpretation suggested by KRÜGER the term $2s2s^1S$, or better the term X , should be about 191000 cm^{-1} below the limit of He^+ which looks to be too far from the theoretical value⁽⁶⁾. To examine the other possible interpretations, let us note that this line, because of its position, should arise from the combination of an ordinary term of neutral helium with an anomalous one. On the other hand, the discrete spectrum of neutral helium, except for the ground state which cannot come into play, falls in the range between 439000 and 470000 cm^{-1} below the limit of He^+ . Since the frequency of the line under discussion is about 280000 cm^{-1} , it should arise from an anomalous term lying between 159000 and 197000 cm^{-1} below the same limit. The only terms satisfying this condition among those that we have mentioned (and there is no need to take into account other terms arising from different orbits which are certainly too small) are the term X and the term $2s2p^3P$. It is very unlikely that the line $\lambda = 357.5$ be a combination of the term $2s2p^3P$ with a normal term; indeed the last one should have at least a total quantum equal to 4 and it would be very strange that its combination with deeper terms had not been observed; I just mention this possible interpretation for the unlikely case that this line be due to atomic helium. Finally, the term X could explain the line $\lambda = 357.5$ by combining with a normal term of total quantum 3; the most probable, as it is the only that satisfies the selection rules, would be $X-1s3p^1P$. In this case the value of the term X should be approximately 171300 cm^{-1} which is not too far from the one in table (2). Let us assume that the eigenfunction of the state X be

$$[\alpha + \beta(r_1 + r_2) + \gamma r_1 r_2 + \delta(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)]e^{-\varepsilon(r_1 + r_2)}$$

which coincides with the unperturbed eigenfunction for some values of the constants. If we determine these constants by the variational method, the value of the term X is approximately 168500 cm^{-1} which is not too different from the one calculated using formula (1), even though the number of parameters is considerably larger, but still less compatible with the assumption $1s3p^1P-X$. The latter is rather unlikely because of the absence of the line $1s2p^1P-X$. The other possible interpretations that have not been discussed are even less acceptable. We thus conclude that the attribution of the line $\lambda = 357.5$ to helium is at the moment still doubtful in spite of the experimental evidence. In any case it cannot be accepted without further investigation.

⁽⁶⁾ A different evaluation referred by the author does not seem to be correct.

Comment on the Scientific Paper n. 3: "On the possible anomalous terms of helium".

In this paper, appeared in "Il Nuovo Cimento" in 1931, E. Majorana deals with the calculation of certain doubly excited levels of helium. The motivation was given by claims of P. G. Krüger, who, a year earlier, observed new emission lines from a helium discharge and ascribed them to the helium spectrum⁽¹⁾. According to Krüger, these lines at wavelengths of 32.04 nm and 35.75 nm were due to transitions involving doubly excited helium levels, namely to the $1s2p\ ^3P - 2p2p\ ^3P$ and $1s2s\ ^1S - 2s2s\ ^1S$ transitions.

Majorana takes into account all helium levels generated by combining two idrogenoid orbits with principal quantum number $n = 2$ and includes the mutual electrons repulsion as a perturbation. The levels are ordered based on the electrons total angular momentum, total spin and parity: $2s2s\ ^1S$, $2s2p\ ^3P$, $2p2p\ ^3P$, $2p2p\ ^1D$, $2s2p\ ^1P$, $2p2p\ ^1S$. Actually, as Majorana points out, the first and the last in the list, having exactly the same symmetries, are mixed by the electrons Coulomb interaction and give rise to two new terms, called, respectively, X and Y in the paper. The energies of all levels are evaluated by a variational perturbative approach and the expected error is estimated from that in calculating the ground-state energy, precisely found by Hylleraas. Majorana was well aware that all doubly excited helium levels lie above the continuum, *i.e.* have an energy higher than the ionized state formed by the ground-state He^+ ion and a free electron. As a consequence, the doubly excited states can undergo spontaneous ionization, also known as Auger effect. Generally, the levels subject to the Auger effect are so highly unstable, hence undetermined in energy, that they cannot give rise to radiative transitions with well-defined wavelengths, such as those observed by Krüger. Relying on symmetry arguments, Majorana deduces that, among the above listed levels, only the $2p2p\ ^3P$ is properly stable. This level is stable because it is a "reflected" state, meaning that, upon a parity transformation, its wave function is multiplied by a factor $(-1)^{L+1}$ with L denoting the orbital angular momentum, while for "normal" levels the wave function acquires a factor $(-1)^L$. In the absence of radiation, transitions from "reflected" to "normal" states, such as the ionized state, are forbidden. As for the $2s2s\ ^1S$ (X) state, he speculates that, although unstable, its lifetime could be much longer than the others, and thus Krüger's assignment, involving the $2s2s\ ^1S$ (X) level for the line at 35.75 nm, should not be readily rejected without further inquiry.

To judge Krüger's assignment, Majorana compares the wave numbers of the two

⁽¹⁾ P. G. KRÜGER, *Phys. Rev.* **36** (1930) 855.

lines with his calculations. Majorana deems correct the identification of the 32.04 nm line, while unlikely that of 35.75 nm line: the former line implies that the term $2p2p\ ^3P$ lies 156000 cm^{-1} below the energy of the bare nucleus He^{++} , in good agreement with Majorana's value of 156350 cm^{-1} . On the contrary, the line at 35.75 nm would put the $2s2s\ ^1S(X)$ energy 191000 cm^{-1} below the He^{++} threshold, *i.e.* too far from the calculated value of 168800 cm^{-1} . Unable to find other suitable terms, E. Majorana doubts that the 35.75 nm line belongs to the helium spectrum altogether.

It is worth noticing how Majorana emphasizes the symmetry properties of the investigated levels upon rotations, exchange of electrons and parity. Such an approach, while commonplace in modern physics, was unusual at that time. Indeed, in the introduction of his fundamental book *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1931), H. Weyl remarks that the use of the group representations in physics was just dawning.

Published in Italian, this work of Majorana's seems to have gone largely unnoticed if a few years later Fender *et al.*⁽²⁾, Ta-You Wu⁽³⁾ and Wilson⁽⁴⁾ separately attack the same issue with no reference to Majorana. Fender *et al.* and Wilson agree with Majorana on rejecting Krüger's identification of the 35.75 nm, while Wu, even in the presence of a 3.4% discrepancy, backs Krüger's assignment with "a partial support"^(*). Later on, doubly excited helium levels have been studied by several authors, among those U. Fano who, in this context, elaborated his celebrated theory of the lineshapes of a discrete state coupled to a continuum⁽⁵⁾. Recently, E. Lindroth reevaluated the energies of all levels considered by Majorana, finding values systematically below those of Majorana, with differences ranging from 1% to 9%⁽⁶⁾. The energy widths found by Lindroth show that Majorana was right in presuming the $2s2s\ ^1S(X)$ state to be longer lived than the other levels, but it is still too wide to yield sharp transition lines.

Retrospectively we clearly see that, in the intervening 75 years, Majorana's interest in the helium spectrum has been shared by many. In 1929, a fundamental contribution was given by E. A. Hylleraas who introduced a specific set of trial wave functions that proved very successful for variational calculations⁽⁷⁾. A vigorous drive to improve upon Hylleraas' work came in the sixties by C. L. Pekeris and co-workers, who exploited the newly available computers⁽⁸⁾. Another leap forward was carried out by G. W. F. Drake⁽⁹⁾, who increased the precision of Schrödinger eigenvalues up to 10^{-15} .

⁽²⁾ F. G. FENDER and J. P. VINTI, *Phys. Rev.* **46** (1934) 77.

⁽³⁾ TA-YOU WU, *Phys. Rev.* **46** (1934) 239.

⁽⁴⁾ WM. S. WILSON, *Phys. Rev.* **48** (1935) 536.

^(*) One year later, in 1935, Ta-You Wu found a 19% mistake in his calculation. Once corrected the mistake, the partial support to Krüger's assignment resulted untenable. It is somewhat ironic that, as U. Fano pointed out in a conversation with E. Amaldi, Wu's work has been frequently quoted while Majorana's almost never.

⁽⁵⁾ U. FANO, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1866.

⁽⁶⁾ E. LINDROTH, *Phys. Rev.* **49** (1994) 4473.

⁽⁷⁾ E. A. HYLLEAAS, *Z. Phys.* **54** (1929) 347.

⁽⁸⁾ Y. ACCAD, C. L. PEKERIS and B. SCHIFF, *Phys. Rev.* **4** (1971) 516.

⁽⁹⁾ G. W. F. DRAKE, in *Atomic, Molecular and Optical Physics Handbook*, edited by

Nowadays, far from being exhausted, the interest for helium levels has shifted. Since the Schrödinger equation is solved for all practical purposes, the atomic theory takes now into account relativistic, recoil and radiative corrections. The challenging task is first to derive the perturbation operators in powers of the fine-structure (FS) constant α and of the electron-to-nucleus mass ratio m/M , then to evaluate the operators on non-relativistic wave functions. Calculated levels can be checked by laser spectroscopy experiments, that on helium have reached precisions up to 0.01 ppb. Another important chapter in helium spectroscopy is the investigation of FS splittings. Because many contributions cancel out, the FS separations are less affected by unknown relativistic, recoil and QED corrections. Since, for instance, the FS splittings of the $1s2p\ ^3P$ state have been measured with a precision of 0.03 ppm, these could be used to determine α once the theory is sufficiently well established⁽¹⁰⁾.

We know how Majorana was cautious, even reluctant, in publishing his works. The influence he bears on physics with only 9 papers highlights not only the depth of his insight but also his foresight in choosing his topics. Rephrasing A. Schawlow's remark about diatomic molecules being molecules "with an atom too many", one could think that the helium atom has an electron too many since it cannot be solved exactly like hydrogen. However, here lies the very reason of the interest that helium aroused in E. Majorana and continues to arouse among researchers, theoreticians and experimentalists alike.

MASSIMO INGUSCIO
Università di Firenze

FRANCESCO MINARDI
Università di Firenze

G. W. F. Drake (AIP Press, New York) 1996, p. 154, and reference therein.

⁽¹⁰⁾ P. J. MOHR and B. TAYLOR, *Rev. Mod. Phys.* **77** (2002) 1.

Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno(*)

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Rendiconti dell’Accademia dei Lincei”, vol. 13, 1931, pp. 58-61.

Termini anomali con entrambi gli elettroni eccitati sono da lungo tempo conosciuti in atomi con due elettroni di valenza; notiamo in particolare i seguenti, che sono in parte ben noti in numerosi elementi neutri o ionizzati: $2p2p^3P_{012}$, $2p2p^1D$, $2p2p^1S$. Formalmente analogo a questi ultimi sarebbe, secondo una recente interpretazione⁽¹⁾, il termine X della molecola di idrogeno, a cui spetterebbe precisamente la configurazione $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g^{(**)}$. Ma l’analogia non sussiste nei riguardi energetici; mentre infatti negli atomi la frequenza della riga $2p2p \rightarrow 1s2p$ è dello stesso ordine di grandezza della frequenza $1s2p \rightarrow 1s2s$, al contrario il termine X è relativamente profondo, poco più alto del termine normale $1s\sigma 2p\sigma^1\Sigma_u^{(*)}$ con cui dà intense combinazioni nell’ultra-rosso, ma il secondo a sua volta è assai più elevato dello stato fondamentale $(1s\sigma)^{21}\Sigma_g$ (ca. 12 volt); sorge di qua la difficoltà di giustificare in via teorica la anormale posizione energetica di detto termine anomalo e la sua stessa esistenza. A tale difficoltà WEIZEL ha cercato di ovviare con una valutazione problematica, fondata su dubbie analogie; noi abbiamo affrontato direttamente la questione, e i nostri calcoli sembrano confermare la presunzione di WEIZEL che esista un termine profondo $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$, benché la distanza teorica di equilibrio dei nuclei si accordi meglio con il termine K (secondo WEIZEL $2p\sigma 3p\sigma^1\Sigma_g$) che con il termine X .

Risulta peraltro che la qualifica di stato con due elettroni eccitati è puramente formale, e in realtà la designazione dei termini mediante gli stati dei singoli elettroni, se giova alla

(*) Presentata dal Socio O. M. CORBINO nella seduta del 4 gennaio 1931.

⁽¹⁾ W. WEIZEL, “Z. Physik”, 65, 456 (1930).

(**) Gli indici in basso g ed u stanno per “gerade” e “ungerade” che in tedesco significano “pari” e “dispari”. (Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*)

(*) Nei “Rendiconti dell’Accademia dei Lincei” è erroneamente stampato Σ_n , qui e in seguito, al posto di Σ_u . (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

loro numerazione e al riconoscimento di quei caratteri di simmetria che non sono turbati dall'interazione, non permette da sola di trarre conclusioni attendibili sulla forma effettiva delle autofunzioni; le cose stanno qui ben diversamente che nel caso di campi centrali, dove è in generale possibile astrarre dall'interdipendenza dei movimenti degli elettroni (polarizzazione), senza perder di vista l'essenziale.

Il termine $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ di cui ci dobbiamo occupare si può pensare come parzialmente costituito dall'unione $H^+ + H^-$, il che non significa che sia un composto polare, poiché per l'uguaglianza dei costituenti il momento elettrico cambia segno con frequenza elevata (frequenza di scambio) e non è quindi osservabile; in questo senso parliamo di composto pseudopolare.

Tutto ciò vale soltanto in una rozza approssimazione e per una descrizione più accurata, benché ancora assai schematica, è necessario considerare la reazione $H^+ + H^-$ insieme con l'altra $H + H$ che fu da sola esaminata da HEITLER e LONDON⁽²⁾; limitandoci allora ai termini *pari* che ne risultano troviamo: 1) lo stato fondamentale $(1s\sigma)^{21}\Sigma_g$ in seconda approssimazione rispetto al metodo di HEITLER e LONDON; 2) lo stato anomalo $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$. Il primo deriva prevalentemente da $H + H$, il secondo prevalentemente da $H^+ + H^-$.

1. Se si divide lo spazio delle configurazioni in quattro regioni aa , ab , ba , bb , secondo che ciascuno degli elettroni è più vicino al nucleo a o al nucleo b , e si prescinde per un momento dall'interazione, le quattro possibilità sono egualmente rappresentate nello stato $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$, ma l'autofunzione è, ad esempio, positiva in aa e bb , negativa negli altri due casi; l'interazione accresce la probabilità di trovare il sistema in^(*) aa e bb e diminuisce quella di trovarlo in ab e ba . Si riconosce facilmente questo comportamento anormale osservando che lo stato $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ deve essere ortogonale allo stato fondamentale, e in questo, come la riconosciuta applicabilità del metodo di HEITLER e LONDON lascia presumere, sono rappresentati in modo preponderante, per nuclei sufficientemente lontani, le regioni ab e ba ; possiamo quindi ritenere che con qualche approssimazione appartiene a $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ l'autofunzione di $H^- + H^+$ simmetrizzata nei nuclei: che tale approssimazione sia peraltro insufficiente s'immagina facilmente se si osserva che in tal modo le superficie nodali vanno interamente perdute. Queste ricompaiono se si include nel calcolo di perturbazione l'unione $H + H$ di due atomi neutri. Indicando con Φ_{12} e Ψ_{12} le autofunzioni elettroniche di H^- rispettivamente intorno al nucleo a e intorno al nucleo b , e con φ o ψ l'autofunzione dell'atomo neutro a o b , si possono costruire come combinazione delle configurazioni $H^- + H^+$, $H^+ + H^-$, $H + H$ (quest'ultima coppia per risonanza degli elettroni) due autofunzioni pari appartenenti al sistema dei singoletti:

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = \Phi_{12} + \Psi_{12} \\ y_2 = \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1. \end{cases}$$

⁽²⁾ W. HEITLER e F. LONDON, "Z. Physik", 44, 455 (1927).

^(*) Nei "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei" è erroneamente stampato "di". (Nota del Curatore.)

Degli altri due stati che derivano dalle stesse configurazioni ed hanno simmetria differente non ci occupiamo; essi sono lo stato dispari dei tripletti $1s\sigma 2p\sigma^3\Sigma_u$, instabile e già considerato da HEITLER e LONDON e, con qualche approssimazione, lo stato $1s\sigma 2p\sigma^1\Sigma_u$ che appartiene ai singoletti ma è anch'esso dispari. Gli stati y_1 e y_2 dati da (1) non sono ortogonali, ma lo stato fondamentale $(1s\sigma)^2\Sigma_g$ e lo stato anomalo $(2p\sigma)^2\Sigma_g$ devono risultare da loro combinazioni ortogonali. L'equazione secolare per la determinazione degli autovalori si scrive(*):

$$(2) \quad \begin{vmatrix} I_0 + I_1 - (1 + S)E & 2M - 2QE \\ 2M - 2QE & L_0 + L_1 - (1 + R)E \end{vmatrix} = 0$$

essendo, se le autofunzioni sono reali:

$$(3) \quad \begin{cases} I_0 = \int \varphi_1\psi_2 H \varphi_1\psi_2 d\tau \\ I_1 = \int \varphi_2\psi_1 H \varphi_1\psi_2 d\tau \\ L_0 = \int \Phi_{12} H \Phi_{12} d\tau \\ L_1 = \int \Phi_{12} H \Psi_{12} d\tau \\ M = \int \varphi_1\psi_2 H \Phi_{12} d\tau \\ S = \int \varphi_1\psi_1 \varphi_2\psi_2 d\tau \\ R = \int \Phi_{12} \Psi_{12} d\tau \\ Q = \int \varphi_1\psi_2 \Phi_{12} d\tau \end{cases}$$

Se si assume come zero dell'energia quella, ad esempio, degli atomi neutri separati si può riguardare H come perturbazione; la differenza delle energie di $H^+ + H^-$ e $H + H$ figura allora naturalmente come perturbazione quando H è applicato a Φ_{12} o a Ψ_{12} .

2. Parte degli integrali (3) si trovano in HEITLER e LONDON⁽³⁾ e SUGIURA⁽⁴⁾; per valutare gli altri dobbiamo procurarci una espressione approssimata di Φ_{12} . Questa autofunzione, che descrive lo ione H^- , non è esattamente conosciuta, ma il suo autovalore,

(*) Nei "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei" in eq. (2) manca erroneamente il termine "= 0".

(Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

⁽³⁾ W. HEITLER e F. LONDON, loc. cit.

⁽⁴⁾ Y. SUGIURA, "Z. Physik", 45, 484 (1927).

che è legato all'affinità elettronica dell'idrogeno, è stato calcolato con estrema precisione da vari Autori⁽⁵⁾; questo semplifica la valutazione degli integrali (3) poiché H si riduce ad un operatore finito. Come espressione di Φ_{12} possiamo assumere con una certa approssimazione il prodotto $\Phi_1 \Phi_2$ di due autofunzioni dipendenti dai singoli elettroni; la soluzione migliore, nel senso della minima energia, è allora, come è noto, quella fornita dal metodo di HARTREE, che nel nostro caso è con grande approssimazione:

$$\Phi_1 = \frac{c}{r_1} \left(e^{-0,29 \frac{r_1}{a_0}} - e^{-1,68 \frac{r_1}{a_0}} \right)$$

e analogamente per Φ_2 , ma benché sia possibile eseguire tutti i calcoli con questa autofunzione, la complicazione è eccessiva e abbiamo preferito l'espressione più semplice

$$\Phi_1 = c e^{-\frac{11}{16} \frac{r_1}{a_0}}$$

che è stata usata da HYLLERAAS nella sua teoria dell'idruro(*) di litio solido⁽⁶⁾. L'uso dell'autofunzione approssimata Φ_{12} e il modo convenzionale d'intendere $H\Phi_{12}$ fornisce per M due valori differenti:

$$M = \int \varphi_1 \psi_2 H \Phi_{12} d\tau \quad \text{e} \quad M = \int \Phi_{12} H \varphi_1 \psi_2 d\tau.$$

Abbiamo preferito la prima espressione che è più semplice e forse più esatta, ma come la seconda non si presta al calcolo, il controllo non ci è stato possibile, salvo che in casi limiti. Il più alto degli autovalori di (2) che appartiene a $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ diviene minimo a una distanza che male si accorda con la distanza d'equilibrio del termine X (circa 2 Å in luogo di 1,35), ma l'energia risulta allora di 7,5 volt al di sopra di quella degli atomi neutri separati e nello stato fondamentale, cioè circa 27000 cm^{-1} sotto il limite normale di H_2 (sperimentalmente per il termine X: 22000 cm^{-1}) e questo risultato è anche troppo favorevole, poiché per il metodo seguito era da aspettarsi un valore notevolmente minore del vero. Benché non possiamo escludere in modo assoluto che l'interpretazione di WEIZEL sia falsa e che il termine $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$, certamente stabile e relativamente profondo, non sia il termine X ma, o il termine K, o altro termine non ancora osservato, si può forse attribuire l'errore nella determinazione della posizione di equilibrio e il risultato troppo favorevole del calcolo dell'energia all'uso di una autofunzione poco corretta per H^- : una valutazione quantitativa è difficile, ma sembra certo che quella approssimazione tende a produrre errori nel senso stesso delle divergenze constatate fra calcolo ed esperienza.

⁽⁵⁾ H. BETHE, "Z. Physik", 57, 815 (1929); E. A. HYLLERAAS, *ivi*, 60, 624 (1930); P. STARODUBROSKI, *ivi*, 65, 806 (1930).

(*) Nei "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei" è stampato idrite (di litio), ma nel manoscritto figura idride, termine improprio, traslato dal tedesco, per idruro: LiH. (Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*)

⁽⁶⁾ E. A. HYLLERAAS, "Z. Physik", 63, 771 (1930).

Commento alla Nota Scientifica n. 4 : “Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno”.

Questo lavoro, il numero 4 della produzione di Majorana, è “tecnicamente” simile al lavoro numero 2 sul legame chimico dello ione He_2^+ . Sebbene Majorana sia un teorico il suo interesse muove sempre da considerazioni di tipo sperimentale. Anche la motivazione di questo lavoro non si riduce ad un puro esercizio accademico ma punta a spiegare un fenomeno non spiegato osservato nello spettro della molecola di H_2 (il cosiddetto termine X). Mentre per un sistema atomico la frequenza della transizione $2p\ 2p - 1s\ 2p$ (in cui sono coinvolti due elettroni ottici eccitati) è molto simile a quella della transizione $1s\ 2p - 1s\ 2s$ (dove un solo elettrone ottico è eccitato) questo comportamento non è più valido per un analogo sistema molecolare come osservato nello spettro dell' H_2 in cui lo stato eccitato $(2p\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$ decade verso lo stato $1s\sigma\ 2p\sigma\ ^1\Sigma_u$ nella regione spettrale dell'infrarosso (termine X anomalo). Come già fatto nel lavoro n. 2, Majorana fa uso del concetto di forza di risonanza.

Il suo approccio è di assumere la formazione della molecola di H_2 come il risultato dell'interazione tra due ioni, H^+ e H^- (*legame pseudopolare*), e di considerare la possibilità che un elettrone possa saltare da un nucleo all'altro ad una data frequenza. Coerentemente con questa idea, Majorana sceglie combinazioni di autofunzioni elettroniche del sistema $(\text{H}^+ + \text{H}^-)$ (dove un elettrone può oscillare tra due protoni) e del sistema $(\text{H} + \text{H})$ (dove invece ciascun elettrone è associato ad un protone) e seleziona due funzioni pari che danno luogo a stati legati. In questo modo egli trova lo stato fondamentale $(1s\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$ (già contenuto nella teoria di Heitler e London) e lo stato eccitato $(2p\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$.

Per raggiungere questo risultato Majorana dimostra ancora una volta di utilizzare con grande padronanza le funzioni d'onda (vedi, per esempio, la discussione circa lo spazio delle configurazioni della densità elettronica, le congetture sulle superfici nodali, e gli argomenti per selezionare gli stati di singoletto). Inoltre, per ottenere risultati quantitativi egli riesce a superare i limiti impostati dalla non integrabilità analitica introducendo, ad arte, semplificazioni opportune. Così come il punto di partenza del suo lavoro è riferito a fatti sperimentali, i dati riportati in letteratura sono costantemente impiegati come *feed-back* dei suoi calcoli.

A tale proposito è significativo sottolineare lo stile con il quale Majorana adopera questi confronti. Di fronte ad un buon accordo con i dati sperimentali Majorana non esita quasi a sminuirne la portata commentando: “... *si può forse attribuire... il risultato troppo favorevole del calcolo dell'energia all'uso di una autofunzione poco corretta per H^-* ”. Simili dichiarazioni, tra l'altro presenti anche nel lavoro n. 2, denotano una onestà intellettuale ed uno spirito predisposto a stupirsi che, oggigiorno, rappresentano virtù piuttosto rare.

ANTONIO SASSO
Università di Napoli

Pseudopolar reaction of hydrogen atoms^(*)^(**)

ETTORE MAJORANA

Anomalous terms with both the electrons excited are known since a long time to occur in atoms with two valence electrons. In particular, the following are well known in numerous neutral or ionized atoms: $2p2p^3P_{012}$, $2p2p^1D$, $2p2p^1S$. According to a recent interpretation⁽¹⁾ the X term of the hydrogen *molecule* is formally analogous to these terms and should be precisely assigned to the configuration $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g(\star)$. The analogy, however, breaks down in regard to the energies: whereas in atoms the frequency of the line $2p2p \rightarrow 1s2p$ is of the same order of magnitude as the frequency of the line $1s2p \rightarrow 1s2s$, the X term is instead relatively deep, slightly above the normal term $1s\sigma 2p\sigma^1\Sigma_u(\star\star)$ with which it intensely combines in the infrared region; but the second one is in turn much higher than the ground state $(1s\sigma)^{21}\Sigma_g$ (ca. 12 volts). The problem is then to justify theoretically the abnormal energy level of such an anomalous term and even to justify its existence. WEIZEL, in his attempt to solve the problem, provided a rather questionable evaluation based on dubious analogies. We have attacked the problem directly and our calculations seem to confirm WEIZEL's assumption about the existence of a deep term $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$, although the theoretical equilibrium distance between the two nuclei is in better agreement with the term K (according to WEIZEL $2p\sigma 3p\sigma^1\Sigma_g$) than with the term X .

(*) Presented by the member O. M. CORBINO at the meeting held on January 4, 1931.

(**) Translated from "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei", vol. 13, 1931, pp. 58-61, by P. Radicati di Brozolo.

(1) W. WEIZEL, "Z. Physik", 65, 456 (1930).

(\star) The lower indices g and u are shorthand notations for "gerade" and "ungerade", which are the German for "even" and "odd". (Note of the Editor in E. AMALDI, *op. cit.*)

($\star\star$) In "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei" it is erroneously printed Σ_n , here and in the following, in place of Σ_u . (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

On the other hand, to consider such a state as a state with two excited electrons has purely formal meaning. In reality, to designate such terms with the states of the single electrons, though it may be convenient for their numbering and for the identification of those symmetry characters that are not affected by the interaction, does not allow by itself to draw reliable conclusions on the explicit form of the eigenfunctions. The situation is very different from the one of central fields where it is generally possible to neglect the interdependence of the electron motions (polarization) without losing sight of the essentials.

The term $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ we have to deal with can be thought of as partially formed by the union $H^+ + H^-$. This does not mean, however, that it is a polar compound since, because of the equality of the constituents, the electric moment changes sign with a high frequency (exchange frequency) and therefore cannot be observed. It is in this sense that we speak of a pseudopolar compound.

All that has been said so far holds true only in rough approximation. For a more accurate, even though still rather schematic, description, one needs to consider together with the reaction $H^+ + H^-$ also the other, $H + H$, the sole one studied by HEITLER and LONDON⁽²⁾. Then if we only consider the resulting *even* terms, we find that: 1) in second approximation, with respect to HEITLER and LONDON's method, the ground state is $(1s\sigma)^{21}\Sigma_g$; 2) the anomalous state is $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$. The first comes predominantly from $H + H$, the second predominantly from $H^+ + H^-$.

1. Let us divide the configuration space into four regions: *aa*, *ab*, *ba*, *bb*, according as to whether each of the electrons is closer to nucleus *a*, or to nucleus *b*, and let us disregard for the moment the interaction. The four possibilities are equally represented in the state $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$; the eigenfunction is, say, positive in *aa* and *bb* and negative in the other two cases. The interaction increases the probability to find the system in *aa* and *bb*, whereas it decreases that of *ab* and *ba*. This anomalous behaviour can be easily understood by noticing that the state $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ must be orthogonal to the ground state. In this state the regions *ab* and *ba* are predominantly represented, if the nuclei are sufficiently distant, as indeed expected from the applicability of HEITLER and LONDON's method. We can then assume with some approximation that the eigenfunction of $H^- + H^+$ symmetrized with respect to the nuclei belongs to $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$. However, it is easy to recognize that this approximation is insufficient by observing that the nodal surfaces are completely lost. These nodal surfaces reappear if we include the union $H + H$ of two neutral atoms in the perturbative calculation. Let us denote by Φ_{12} and Ψ_{12} the electronic eigenfunctions of H^- for the electrons close to nucleus *a* and nucleus *b*, respectively, and by φ or ψ the eigenfunction of the neutral atom *a* or *b*. With these functions we can construct as a combination of the configurations $H^- + H^+$, $H^+ + H^-$, $H + H$ (the last being double due to the electrons resonance) two even eigenfunctions belonging to the singlet system:

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = \Phi_{12} + \Psi_{12} \\ y_2 = \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1. \end{cases}$$

⁽²⁾ W. HEITLER and F. LONDON, "Z. Physik", 44, 455 (1927).

We disregard the other two states arising from the same configurations but having different symmetry; they are the odd state of the triplets $1s\sigma 2p\sigma^3\Sigma_u$ which is unstable and has already been considered by HEITLER and LONDON and, with some approximation, the $1s\sigma 2p\sigma^1\Sigma_u$ state that belongs to the singlets but is equally odd. The states y_1 and y_2 that appear in (1) are not orthogonal but the ground state $(1s\sigma)^2\Sigma_g$ and the anomalous state $(2p\sigma)^2\Sigma_g$ should result from their orthogonal combinations. The secular equation for determining the eigenvalues is(*):

$$(2) \quad \begin{vmatrix} I_0 + I_1 - (1 + S)E & 2M - 2QE \\ 2M - 2QE & L_0 + L_1 - (1 + R)E \end{vmatrix} = 0$$

where, if the eigenfunctions are real:

$$(3) \quad \begin{cases} I_0 = \int \varphi_1\psi_2 H \varphi_1\psi_2 d\tau \\ I_1 = \int \varphi_2\psi_1 H \varphi_1\psi_2 d\tau \\ L_0 = \int \Phi_{12} H \Phi_{12} d\tau \\ L_1 = \int \Phi_{12} H \Psi_{12} d\tau \\ M = \int \varphi_1\psi_2 H \Phi_{12} d\tau \\ S = \int \varphi_1\psi_1 \varphi_2\psi_2 d\tau \\ R = \int \Phi_{12} \Psi_{12} d\tau \\ Q = \int \varphi_1\psi_2 \Phi_{12} d\tau \end{cases}$$

If, for example, we set the energy of the separate neutral atoms equal to zero, we can consider H as a perturbation; the difference between the energies of $H^+ + H^-$ and of $H + H$ naturally appears then as a perturbation when H is applied to Φ_{12} or to Ψ_{12} .

2. Some of the integrals (3) can be found in HEITLER and LONDON⁽³⁾ and SUGIURA⁽⁴⁾; to evaluate the other integrals we have to find an approximate expression for Φ_{12} . This eigenfunction, describing the ion H^- , is not exactly known but its eigenvalue, which is related to the electronic affinity of hydrogen, has been calculated with

(*) In "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei" the term "= 0" of eq. (2) is erroneously missing. (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

⁽³⁾ W. HEITLER and F. LONDON, *loc. cit.*

⁽⁴⁾ Y. SUGIURA, "Z. Physik", 45, 484 (1927).

great precision by several Authors⁽⁵⁾. This simplifies the evaluation of the integrals (3) since H reduces to a finite operator. For Φ_{12} we can approximately take the product $\Phi_1 \Phi_2$ of two eigenfunctions depending on the single electrons. The best solution in the sense of the minimum energy is then, as is well known, the one given by HARTREE'S method which in our case is, with great approximation,

$$\Phi_1 = \frac{c}{r_1} \left(e^{-0.29 \frac{r_1}{a_0}} - e^{-1.68 \frac{r_1}{a_0}} \right)$$

and similarly for Φ_2 . The whole calculation, using this eigenfunction, though feasible, is too cumbersome; we have therefore preferred to use the simpler expression

$$\Phi_1 = c e^{-\frac{11}{16} \frac{r_1}{a_0}}$$

that has already been used by HYLLERAAS in his theory of solid lithium hydride⁽⁶⁾. Using the approximate eigenfunction Φ_{12} and the conventional meaning for $H\Phi_{12}$, we obtain for M two different values:

$$M = \int \varphi_1 \psi_2 H \Phi_{12} d\tau \quad \text{and} \quad M = \int \Phi_{12} H \varphi_1 \psi_2 d\tau.$$

We prefer the first expression that is simpler and possibly more exact; however since the second does not allow simple calculations, we cannot control this statement except for the limiting cases. The largest of the eigenvalues of (2) that belongs to $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$ reaches its minimum at a distance that is in disagreement with the equilibrium distance of the term X (approximately 2 \AA instead of 1.35). However, the energy is 7.5 volts above the energy of the neutral atoms when they are separated and in the ground state, *i.e.* approximately 27000 cm^{-1} below the normal limit of H_2 (the experimental value for the X term being 22000 cm^{-1}). This result is even too favourable as, with the method we followed, we could have expected a value considerably smaller than the true one. We cannot definitely exclude that WEIZEL'S interpretation is wrong and that the term $(2p\sigma)^{21}\Sigma_g$, which is certainly stable and relatively deep, is, instead of the X term, rather the K term or some other term not yet observed. Nevertheless it is perhaps possible to attribute the error in the determination of the equilibrium point and the too favourable result in the calculation of the energy to the use for H^- of a non-properly correct eigenfunction. A quantitative evaluation is difficult but it is plausible that such an approximation tends to produce errors compatible with the discrepancies ascertained between calculation and experiment.

⁽⁵⁾ H. BETHE, "Z. Physik", *57*, 815 (1929); E. A. HYLLERAAS, *ivi*, *60*, 624 (1930); P. STARO-DUBROSKI, *ivi*, *65*, 806 (1930).

⁽⁶⁾ E. A. HYLLERAAS, "Z. Physik", *63*, 771 (1930).

Comment on the Scientific Paper no. 4 : "Pseudopolar reaction of hydrogen atoms".

This paper, no. 4 of the Majorana production, is "technically" similar to paper no. 2 on the chemical bond of the He_2^+ ion. Although Majorana is a theoretician, his interest always arouses from considerations of experimental kind. Hence, also the motivation of this work is not a purely academic exercise, but it is aimed to explain an unexplained phenomenon observed in the spectrum of the H_2 molecule (the so-called X term). While for an atomic system the frequency corresponding to the transition $2p\ 2p - 1s\ 2p$ (involving two excited optical electrons) is quite close to that of the transition $1s\ 2p - 1s\ 2s$ (where only one optical electron is excited) this behaviour is no longer valid for the analogous molecular system as observed in the spectrum of H_2 where the excited $(2p\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$ state decays toward the state $1s\sigma\ 2p\sigma\ ^1\Sigma_u$ in the infrared spectral region (anomalous X term). As already done in paper no. 2, Majorana makes use of the concept based on the resonance force.

His approach assumes the molecule formation to be the result of the interaction between two ions, H^+ and H^- (*pseudopolar binding*), and considers the possibility that one electron can jump from one nucleus to the other at a given frequency. Coherently with this idea, Majorana chooses combinations of electronic eigenfunctions of the $(\text{H}^+ + \text{H}^-)$ (where one electron can oscillate between the two protons) and $(\text{H} + \text{H})$ (where instead each electron is associated to one proton) systems and selects two even functions which give rise to bound states. In such a way he finds the ground state $(1s\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$ (already contained in the theory of Heitler and London) and the excited state $(2p\sigma)^2\ ^1\Sigma_g$.

To reach this result once again Majorana demonstrates his capability to remarkably master the use of wave functions (see, for instance, the discussion on the configuration space for the electron density distribution, the comment on the nodal surfaces, and the motivation for selecting the singlet states). Moreover, in order to obtain quantitative results he manages to overcome the limits imposed by analytical non-integrability using, with artfulness, appropriate simplifications. As the starting point of his study is connected with experimental facts, similarly the data reported in the literature are always used as a feedback for his calculations.

In this respect it is worth to underline the style of Majorana in making this comparison. In the presence of a good agreement with the experimental data Majorana does not hesitate to almost diminish its importance by commenting: “... *it is perhaps possible to attribute... the too favourable result in the calculation of the energy to the use for H^- of a non properly correct eigenfunction.*” Similar comments are also present at the end of paper no. 2 and denote an intellectual honesty and, at the same time, a spirit inclined to astonishment which, especially nowadays, are quite rare virtues.

ANTONIO SASSO
Università di Napoli

Teoria dei tripletti P' incompleti

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Il Nuovo Cimento”, vol. 8, 1931, pp. 107-113.

Sunto. — I più noti tripletti anomali posti sopra il limite delle serie normali sono stabili se si trascurano le correzioni relativistiche. La presenza dei momenti magnetici intrinseci determina una leggera instabilità che solo in circostanze eccezionali può assumere importanza quantitativa. Le condizioni a ciò necessarie sono soddisfatte per la componente $j = 2$ dei tripletti anomali di Zn, Cd e Hg; l'esperienza conferma che la componente 3P_2 di questi tripletti è assente o indebolita.

Nello spettro del calcio sono noti cinque gruppi ciascuno di sei linee che sono combinazioni del termine $1s2p{}^3P_{012}$ (numeri correnti empirici) con una successione di tripletti ${}^3P'_{012}$ che si lasciano ordinare in serie; ma il limite di questa serie corrisponde a Ca^+ con l'elettrone esterno nell'orbita $3d$ e non nell'orbita fondamentale $1s$, come accade per le serie normali, e questa ed altre circostanze obbligano ad attribuire ai tripletti P' del calcio la configurazione $3dnd{}^3P_{012}$ ($n = 3, 4, 5, \dots$). Si tratta dunque di stati con entrambi gli elettroni eccitati. Ciò che vogliamo qui rilevare a proposito di tali termini anomali del calcio, è solo che parte di essi stanno al di sopra del potenziale di ionizzazione, nel campo dello spettro continuo, e ciò nonostante sono stabili, non danno luogo cioè a una ionizzazione spontanea apprezzabile. Questo fatto non ha nulla di strano, poiché sarebbe facile dimostrare che nell'approssimazione non relativistica i detti termini hanno tali caratteri di simmetria che le transizioni allo spettro continuo sono rigorosamente vietate. Ma in altri elementi e precisamente in Zn, Cd e Hg sono conosciuti tripletti P' oltre il potenziale di ionizzazione che dovrebbero essere stabili per le stesse ragioni, ma nei quali

manca la componente P'_2 , mentre P'_1 e P'_0 sono state osservate. Questi termini di Zn, Cd e Hg sono analoghi a quelli del calcio ora ricordati, benché derivino da configurazioni differenti (pp in luogo di dd), e perché in quelli manchi una componente, e precisamente P'_2 , è quanto qui ci proponiamo di studiare. L'ipotesi affacciata da FOOTE, TAKAMINE e CHENAULT⁽¹⁾, limitatamente a Cd, e anche per spiegare certe anomalie di intensità, che il termine P'_2 esista, ma sia accidentalmente così prossimo a P'_1 da renderne impossibile la risoluzione, non mi sembra sostenibile, sia perché di troppo contraddice alle regole dell'accoppiamento normale, sia perché è smentita dalla mancanza dei termini analoghi, di Zn e Hg. Voglio ancora notare che per Zn, esattamente al posto delle righe mancanti ${}^3P'_2 - {}^3P_2$ e ${}^3P'_2 - {}^3P_1$ SAWYER⁽²⁾ pose due linee ${}^1D_2 - {}^3P_2$ e ${}^1D_2 - {}^3P_1$ più deboli e di aspetto differente da quello delle quattro linee restanti del gruppo $P P'$, essendo 1D_2 uno degli stati che derivano da due orbite $2p$; secondo la presente teoria le righe di SAWYER sono invece precisamente le righe ${}^3P'_2 - {}^3P_2$ e ${}^3P'_2 - {}^3P_1$ che completano il gruppo PP' , indebolite perché il termine ${}^3P'_2$ è instabile per effetto AUGER, e questo è dovuto all'interazione fra *spin* e orbita; al contrario righe che fanno capo al termine 1D_2 non devono essere osservabili perché la instabilità di questo termine è assai maggiore, non ostandovi i suoi caratteri di simmetria anche se si prescinde dal momento magnetico degli elettroni.

1. Da due orbite $2p$ equivalenti derivano senza elettrone rotante i termini 1D , 3P e 1S (gli indici di molteplicità indicano solo simmetria o antisimmetria delle autofunzioni dei baricentri) la cui separazione dipende in prima approssimazione da un unico parametro e può calcolarsi con il metodo di SLATER⁽³⁾; si trova che 3P è il più profondo, 1S il più alto, e che la distanza ${}^1S - {}^1D$ vale $3/2$ della distanza ${}^1D - {}^3P$. Per ciò che riguarda il valore assoluto della separazione, possiamo stimarne l'ordine di grandezza, usando autofunzioni approssimate. I risultati di questo metodo si accordano bene con quanto si osserva, ad esempio, nei termini profondi del silicio; ma vi sono dei casi in cui la prima approssimazione è insufficiente, e citiamo il magnesio dove sono conosciuti il termine $(2p)^2 {}^3P_{012}$ e, se un'interpretazione di SAWYER⁽⁴⁾ è corretta, anche il termine $(2p)^2 {}^1D_2$. Qui il termine 1D_2 è effettivamente più alto di ${}^3P_{012}$ come vuole il metodo di SLATER, ma la separazione è solo di alcune centinaia di cm^{-1} non di alcune migliaia come quel metodo farebbe prevedere; l'anomalia può forse essere spiegata con l'influenza prevalente dello spettro continuo, specie dello "stato virtuale" $(3d)^2 {}^1D_2$ sul termine $(2p)^2 {}^1D_2$. Ragioni analoghe possono valere per i termini $(2p)^2 {}^3P_{012}$ e $(2p)^2 {}^1D_2$ di Zn, Cd e Hg, ma si tratta di termini che sono sopra il limite di ionizzazione, e non considerando il momento magnetico dell'elettrone, solo il primo è stabile, perché è un termine *riflesso*⁽⁵⁾ mentre gli stati dello spettro continuo appartenenti alla stessa energia hanno simmetria normale;

⁽¹⁾ P. D. FOOTE, T. TAKAMINE e R. L. CHENAULT, "Phys. Rev.", 26, 174 (1925).

⁽²⁾ R. A. SAWYER, "J. Opt. Soc. Am.", 13, 431 (1926).

⁽³⁾ J. C. SLATER, "Phys. Rev.", 34, 1293 (1929).

⁽⁴⁾ R. A. SAWYER, loc. cit.

⁽⁵⁾ E. WIGNER, "Z. Physik", 43, 624 (1927).

$(2p)^2\ ^1D_2$ è al contrario esso stesso uno “stato virtuale” nel senso di BECK⁽⁶⁾, e la sua energia, non esattamente definita, è poco maggiore di quella di $(2p)^2\ ^3P_{012}$. L'interazione fra momento intrinseco e orbitale di ciascuno dei due elettroni stabilisce però una mutua influenza fra lo stato virtuale $(2p)^2\ ^1D_2$ e quella componente di $(2p)^2\ ^3P_{012}$ che appartiene allo stesso valore del quanto interno ($j = 2$); e la conseguenza è che anche $\ ^3P_2$ diviene instabile, potendo dar luogo a una ionizzazione spontanea che significa passaggio *senza radiazione* da tripletti a singoletti. La vicinanza di uno stato virtuale con opportuni caratteri di simmetria è necessaria solo perché l'effetto AUGER assuma importanza quantitativa, ma anche quando quello manca come per la componente $\ ^3P_1$, o è abbastanza lontano, come lo stato virtuale $(2p)^2\ ^1S_0$ per la componente $\ ^3P_0$, dobbiamo aspettarci una leggera instabilità, e questo può spiegare le anomalie di intensità osservate nelle righe superstiti del gruppo PP' . Premettiamo pertanto alcune considerazioni generali sull'influenza dei momenti magnetici intrinseci di tutti gli stati $\ ^1D_2\ ^3P_2\ ^3P_1\ ^3P_0\ ^1S_0$ che derivano da due orbite $2p$. Trascurando, come è lecito per numeri atomici sufficientemente alti, l'interazione magnetica fra i due elettroni, e solo portando(*) in conto l'interazione fra il campo elettrico costante dovuto al resto atomico e i momenti magnetici degli elettroni in movimento, cioè il cosiddetto accoppiamento fra *spin* e orbita, la perturbazione si può far dipendere dalla hamiltoniana:

$$(1) \quad H = f(r_1)(s_1, M_1) + f(r_2)(s_2, M_2)$$

essendo s_1, s_2 e M_1, M_2 i momenti intrinseci e orbitali dei due elettroni, che per semplicità supporremo misurati in unità $h/2\pi$, e $f(r)$ una funzione del raggio proporzionale a $\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$. Scegliamo come sistema di coordinate quello in cui l'energia imperturbata è diagonale e ammettiamo ancora che con sufficiente approssimazione le autofunzioni imperturbate possano essere espresse come combinazioni lineari di prodotti di autofunzioni dei singoli elettroni, rappresentanti stati stazionari individuali in un conveniente campo centrale. Giova allora rappresentare la matrice di H come somma di prodotti delle matrici $f(r_1)$ e $f(r_2)$, facilmente valutabili mediante quadrature, per le matrici (s_1, M_1) e (s_2, M_2) , le quali ultime sono in detta approssimazione matrici costanti, che legano cioè solo stati con uguale energia, poiché tali sono separatamente s_1, M_1, s_2 e M_2 ; ma è da notare che funzioni dipendenti dalle coordinate di *un solo* elettrone, quali $f(r_1), s_1, M_1$, etc. non sono grandezze fisiche, e possono formalmente riguardarsi come tali, ed esprimersi con matrici, solo se si rinuncia al principio di PAULI e si considerano anche autofunzioni complete non antisimmetriche. La complicazione che ne risulta non è eccessiva nel caso di due soli elettroni, poiché qui un solo carattere di simmetria non Paulistico resta da considerare: quello delle autofunzioni simmetriche. Ai termini già indicati dobbiamo ancora, ad esempio, aggiungere i seguenti che derivano da due orbite $2p$, e che chiudo in parentesi per indicare che non soddisfano al principio di PAULI ($\ ^3D_{123}$) ($\ ^1P_1$) ($\ ^3S_1$). In

(6) G. BECK, “Z. Physik”, 62, 331 (1930).

(*) Ne “Il Nuovo Cimento” è stampato “pertanto”, ma dal manoscritto risulta “portando”.
(Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*)

tutto per i singoli valori di j troviamo:

$$(2) \quad \begin{cases} j = 3 : ({}^3D_3) \\ j = 2 : ({}^1D_2, {}^3P_2, ({}^3D_2)) \\ j = 1 : ({}^3P_1, ({}^3D_1), ({}^1P_1), ({}^3S_1)) \\ j = 0 : ({}^3P_2, {}^1S_0). \end{cases}$$

Poiché ognuno di questi stati è degenerato $(2j+1)$ volte abbiamo in tutto naturalmente 36 stati, ogni elettrone potendo essere in 3 (degenerazione orbitale) $\times 2$ (degenerazione intrinseca) = 6 stati differenti, e il principio di esclusione è inattivo. Le matrici (s_1, M_1) e (s_2, M_2) che legano fra loro, e in prima approssimazione soltanto fra loro, gli stati (2), si costruiscono direttamente con artifici su cui lo spazio mi vieta di fermarmi. Se riferiamo righe e colonne ai vari stati nello stesso ordine in cui questi sono riportati in (2), tali matrici sono

$$j = 3 \quad (s_1, M_1) = (s_2, M_2) = \frac{1}{2}$$

$$j = 2 \quad (s_1, M_1) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (s_2, M_2) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$j = 1 \quad (s_1, M_1) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(s_2, M_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$j = 0 \qquad (s_1, M_1) = (s_2, M_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Queste equazioni devono intendersi ripetute per ogni valore permesso del quanto magnetico. Deduciamo le seguenti espressioni di $H\psi$ per le componenti del tripletto P' :

$$(3) \quad \begin{cases} H^3 P_2 = \frac{f(r_1) + f(r_2)}{4} {}^3P_2 + \frac{f(r_1) + f(r_2)}{2\sqrt{2}} {}^1D_2 + \sqrt{3} \frac{f(r_1) - f(r_2)}{4} ({}^3D_2) \\ H^3 P_1 = -\frac{f(r_1) + f(r_2)}{4} {}^3P_1 + \sqrt{5} \frac{f(r_1) - f(r_2)}{4\sqrt{3}} ({}^3D_1) + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{f(r_1) - f(r_2)}{2\sqrt{2}} ({}^3P_1) - \frac{f(r_1) - f(r_2)}{\sqrt{3}} ({}^3S_1) \\ H^3 P_0 = -\frac{f(r_1) + f(r_2)}{2} {}^3P_0 + \frac{f(r_1) + f(r_2)}{\sqrt{2}} {}^1S_0. \end{cases}$$

I quadrati dei coefficienti dello sviluppo di $H\psi$ che si riferiscono a stati dello spettro continuo aventi la stessa energia di ψ sono proporzionali, in valore assoluto e in *prima approssimazione*, alla probabilità di ionizzazione spontanea, secondo la formula di WENTZEL⁽⁷⁾. I vari addendi nei secondi membri di (3) sono funzioni *pari* e quelli che appartengono a $L = l$ sono ortogonali agli stati dello spettro continuo aventi l'energia del tripletto P' , perché tali stati risultano da un elettrone $1s$ e uno in un'orbita iperbolica e possono essere, o pari con $L = 0, 2, 4, \dots$, o dispari con $L = 1, 3, 5, \dots$. Gli altri termini nei secondi membri di (3) sono *normalmente* quasi ortogonali agli stessi stati dello spettro continuo, a causa della diversa dipendenza angolare, e lo sarebbero esattamente trascurando la polarizzazione; oltre a ciò portano a fattore $f(r)$ che è dell'ordine degli effetti relativistici, e poiché l'effetto AUGER dipende dal quadrato delle componenti utili di H , concludiamo che esso è *ordinariamente* assai debole per termini del nostro tipo. Le cose cambiano se è presente uno stato virtuale con energia poco diversa, come 1D_2 per la componente 3P_2 . Anche 1S_0 è uno stato virtuale che potrebbe influire sulla stabilità di 3P_0 , ma è troppo lontano e la distanza è accresciuta dagli effetti relativistici. Tornando a 1D_2 questo stato può essere descritto con una autofunzione la cui dipendenza dal tempo è della forma $e^{-\frac{2\pi i}{h} E_0 t} e^{-\frac{t}{2T}} = e^{-\frac{2\pi i}{h} E t}$ essendo $E = E_0 + \frac{h}{4\pi i T}$ un autovalore *complesso*; questa espressione di ψ vale naturalmente solo se entrambi gli elettroni si trovano in una regione dell'ordine delle dimensioni atomiche. Supponiamo ora che l'indeterminazione $a = \frac{h}{4\pi T}$ dell'energia di 1D_2 (*) e la distanza d fra E_0 e l'energia di 3P_2 (incluso il termine diagonale della perturbazione H) siano piccoli rispetto al valore (negativo) del termine; introduciamo ancora $\Delta = \frac{3}{2} \overline{f(r)}$, essendo il valore medio $\overline{f(r)}$ preso su un'orbita $2p$, che rappresenta la separazione energetica fra le componenti

(7) G. WENTZEL, "Z. Physik", 43, 524 (1927).

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è erroneamente stampato 3P_2 . (Nota del Curatore.)

estreme del tripletto normale $1s2p^3P_{012}$ o, ciò che in prima approssimazione è lo stesso, la separazione del tripletto anomalo $(2p)^2^3P_{012}$. Supponiamo ancora Δ piccolo nello stesso senso. Allora si può usare un formalismo assai semplice, la cui giustificazione non sarebbe difficile fondare sulle proprietà di quelle soluzioni periodiche appartenenti a una stretta regione dello spettro continuo, secondo cui lo stato virtuale 1D_2 arbitrariamente limitato è praticamente sviluppabile; lo studio dell'influenza di 1D_2 su 3P_2 è ridotto ad un ordinario problema di perturbazione, e si tratta di trovare gli autovalori (complessi) e gli autovettori (non ortogonali) della matrice:

$$\begin{array}{l} ^1D_2 \\ ^3P_2 \end{array} \left| \begin{array}{cc} d - ai & \frac{\sqrt{2}}{3}\Delta \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\Delta & 0 \end{array} \right|.$$

Il coefficiente dell'immaginario nell'autovalore perturbato di 3P_2 misura con il suo valore assoluto l'indeterminazione dell'energia (semilarghezza) di questo stato, e diviso per $h/4\pi$ dà la probabilità di ionizzazione spontanea nell'unità di tempo. Se Δ è abbastanza piccolo di fronte a $\sqrt{d^2 + a^2}$, e questo potrebbe anche non essere il caso reale, la semilarghezza del termine 3P_2 vale $\frac{2}{9} \frac{\Delta^2}{d^2 + a^2} a$ (*); per $a \rightarrow 0$ questa formola è evidente perché indica che per avere la probabilità di ionizzazione di 3P_2 basta moltiplicare quella di 1D_2 per il rapporto in cui 1D_2 entra in 3P_2 perturbato, secondo la comune teoria delle perturbazioni. Per grandi valori di a , cioè per grande instabilità di 1D_2 , l'instabilità indotta in 3P_2 torna a diminuire dopo aver toccato un massimo, e questo è da intendere nel senso che uno stato 1D_2 eccessivamente instabile cessa di essere "uno stato virtuale", la cui presenza è in ogni caso necessaria perché l'effetto AUGER del termine $(2p)^2^3P_2$ assuma importanza quantitativa.

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è erroneamente stampato $\frac{2}{9} \frac{\Delta^2}{d^2 + a^2} a^2$. (Nota del Curatore.)

Commento alla Nota Scientifica n. 5 : "Teoria dei tripletti P' incompleti".

Questo articolo, pubblicato da Majorana mentre rimane a Roma dopo la discussione della propria tesi di laurea, tratta un problema di spettroscopia atomica, la caratterizzazione degli spettri ottici d'atomi con due elettroni nell'orbita più esterna. Il lavoro di Majorana fu stimolato dalle osservazioni sperimentali pubblicate nel 1925, rif. (1) del lavoro originale, da un gruppo di ricerca del *National Bureau of Standard* (il predecessore dell'attuale *US National Institute of Standards and Technology*). L'importante risultato sperimentale di P. Foote *et al.* era la mancata osservazione di alcune righe previste nello spettro d'assorbimento degli atomi di Hg, Cd e Zn. Più precisamente, fra le sei righe previste per le transizioni ai livelli di tripletto $p^2\ ^3P_{0,1,2}$ più bassi in energia, quelle associate al livello 3P_2 non erano presenti nello spettro di nessuno dei tre atomi. Majorana presenta una spiegazione dell'assenza di tali righe introducendo un nuovo processo spettroscopico che chiama *ionizzazione spontanea*.

A quel tempo, era ben noto che le serie di righe spettrali associate ad atomi (o ioni) con più elettroni nell'orbita più esterna presentavano deviazioni nella posizione dei livelli d'energia e nell'intensità delle righe previste dalle relazioni matematiche valide per gli spettri atomici più semplici. Tali deviazioni erano note come perturbazioni. Le perturbazioni sono prodotte da un processo di risonanza dove due (o più) livelli atomici sono quasi degeneri in energia, e gli autostati sono mescolati dalle interazioni fra gli elettroni. Come conseguenza, le nuove autofunzioni sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger che tiene conto del mescolamento prodotto dalle interazioni, con nuovi autovalori in energia e nuove probabilità di transizione per l'assorbimento di luce. Majorana introduce un nuovo tipo di perturbazione, proponendo che i livelli $p^2\ ^3P_{0,1,2}$ siano perturbati da livelli degeneri posizionati nel continuo sopra il livello di ionizzazione per l'eccitazione di un singolo elettrone. Ipotizza quindi un mescolamento tra livelli discreti e livelli nel continuo. A causa della perturbazione tali livelli discreti acquistano alcune caratteristiche tipiche delle transizioni ottiche associate al continuo: grandi larghezze di riga, asimmetrie nella forma di riga ed intensità anomale nell'emissione ed assorbimento di radiazione. Per esempio, i livelli discreti che sono mescolati al continuo possono decadere attraverso un processo di transizione non radiativa, che converte l'energia dell'atomo eccitato in un elettrone libero ed uno ione positivo. Questo processo costituisce il processo di *ionizzazione spontanea* definito da Majorana e rappresenta l'equivalente nel campo ottico del processo Auger ben noto nel caso dei raggi X, processo menzionato alla fine dell'articolo.

Per le molecole un processo simile, discusso da R. de L. Kronig alcuni anni prima⁽¹⁾, è la predissociazione senza emissione di radiazione quando la somma delle energie vibrazionali ed elettronica della molecola risulta maggiore dell'energia necessaria alla dissociazione in una configurazione elettronica con un'energia più bassa.

Il processo di ionizzazione spontanea per gli spettri ottici atomici fu introdotto in maniera indipendente lo stesso anno da A. G. Shenstone dell'Università di Princeton in una pubblicazione su *The Physical Review*⁽²⁾. Shenstone analizza il livello $^3P_2^0$ dell'atomo di mercurio che era stato scoperto poco prima da T. Takamine e T. Suga⁽³⁾, con l'osservazione confermata da F. Paschen⁽⁴⁾. Shenstone identifica lo stesso processo introdotto da Majorana, ma lo chiama *auto-ionizzazione*, termine che è rimasto standard nella letteratura di spettroscopia atomica, usualmente scritto *autoionizzazione*. In realtà l'attenzione di Shenstone era concentrata sull'atomo di rame il cui spettro ottico è realmente unico in quanto l'autoionizzazione è la regola invece di essere l'eccezione, come affermato nella sua dettagliata descrizione dello spettro di tale elemento pubblicata nel 1936⁽⁵⁾.

In un'importante pubblicazione del 1935⁽⁶⁾, H. Beutler dell'Università di Berlino pubblicò un'analisi dettagliata dello spettro d'assorbimento dei gas nobili per livelli atomici che si trovano sopra il limite di ionizzazione. Nel suo studio Beutler interpreta le osservazioni di forti modulazioni asimmetriche nello spettro d'assorbimento come prodotte dal processo di autoionizzazione e cita i lavori di Kronig e di Shenstone, ma non quello di Majorana. Invece il libro *The Theory of Atomic Spectra* di E. U. Condon e G. H. Shortley nel 1935⁽⁷⁾, spesso indicato come la "Bibbia" della spettroscopia atomica, riconosce il contributo simultaneo ed indipendente di Majorana e Shenstone al concetto di autoionizzazione. Ancora nello stesso anno il lavoro di Beutler attrae l'attenzione di E. Fermi a Roma, che suggerisce al suo giovane collaboratore U. Fano di trovare un'adeguata spiegazione per le forme di riga ottenute da Beutler. Infatti, come osservato dallo stesso Fano, l'ipotesi d'autoionizzazione da sola non forniva la spiegazione delle forme di riga allargate in maniera asimmetrica. Rapidamente Fano produsse una precisa descrizione teorica per il mescolamento di un livello discreto con un continuo, pubblicata in un articolo nel 1935⁽⁸⁾. Questo lavoro, e l'analisi di Fano più dettagliata pubblicata nel 1961⁽⁹⁾, introdussero il profilo di autoionizzazione di Beutler-Fano, una formula per la forma di riga che ha trovato larga applicazione in molti campi della fisica. La ricerca

⁽¹⁾ R. de L. KRONIG, *Z. Phys.* **50** (1928) 347.

⁽²⁾ A. G. SHENSTONE, *Phys. Rev.* **38** (1931) 873.

⁽³⁾ T. TAKAMINE e T. SUGA, *Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res. Tokyo* **13** (1930) 1.

⁽⁴⁾ F. PASCHEN, *Ann. Phys. (Leipzig)* **6** (1930) 47.

⁽⁵⁾ A. G. SHENSTONE, *Philos. Trans. Roy Soc. London* **235** (1936) 195.

⁽⁶⁾ H. BEUTLER, *Z. Phys.* **93** (1935) 177.

⁽⁷⁾ E. U. CONDON e G. H. SHORTLEY, "*Theory of Atomic Spectra*" (Cambridge University Press), 1935.

⁽⁸⁾ U. FANO, *Nuovo Cimento* **12** (1935) 154.

⁽⁹⁾ U. FANO, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1866.

svolta da Fano al NIST negli anni '60, e lo sviluppo parallelo di tecniche sperimentali per la spettroscopia nell'ultravioletto estremo, di nuovo soprattutto al NIST, ha condotto le forme di riga Beutler-Fano alla frontiera del progresso nella fisica atomica, come descritto concisamente da C. W. Clark nel 2001⁽¹⁰⁾. Il concetto d'autoionizzazione ha giocato un importante ruolo nello sviluppo della spettroscopia, poiché è osservata in una grande varietà di spettri atomici e molecolari, e risultati molto differenti sono ottenuti per l'energia e le probabilità dei livelli mescolati dalle perturbazioni.

L'analisi di Majorana del 1931 non esamina lo spettro dell'assorbimento associato all'autoionizzazione. Invece di descrivere il continuo attraverso una distribuzione continua di stati come nelle analisi di Fano, Majorana calcola il mescolamento tra un livello che presenta un decadimento radiativo trascurabile ed un singolo livello che simula il continuo attraverso una larghezza di riga grande, descritta dalla quantità "a" introdotta in fondo a pagina 95. Infine Majorana non deriva l'espressione per la probabilità di transizione del processo di assorbimento che termina nel livello mescolato dalla perturbazione. Anche se la descrizione di Majorana non è completa, dalla diagonalizzazione della matrice di perturbazione che scrive nella pagina finale del suo articolo si potrebbe derivare una espressione per la forma di riga di assorbimento riprodotte la caratteristica forma a dente di sega associata al profilo di autoionizzazione. Tale derivazione della forma di riga è stata fatta da B. W. Shore nel 1968⁽¹¹⁾.

Il mescolamento degli stati discreti e del continuo introdotto da Majorana che produce il processo di autoionizzazione è molto complesso. Il mescolamento della autoionizzazione può avvenire se un livello discreto con energia sopra quella del limite di ionizzazione è quasi risonante con un continuo che possiede la stessa parità e lo stesso momento angolare. Per il caso dei livelli $p^2 \ ^3P_2$ di Hg, Cd e Zn, non esiste un continuo con carattere $\ ^3P_2$ e simmetrico per parità che possa contribuire al mescolamento di autoionizzazione. Pertanto Majorana decide di introdurre un accoppiamento diverso fra gli elettroni dell'orbita più esterna, un accoppiamento non corrispondente al tipico caso LS di Russell-Saunders. Grazie a questo diverso accoppiamento i livelli discreti acquistano caratteristiche miste di termini $p^2 \ ^3P_2$ e $sd \ ^1D_2$ e quindi possiedono un contributo di singoletto necessario ad autoionizzare facilmente nel continuo $sd \ ^1D_2$. Come giustamente fa notare Majorana, questo complicato schema di mescolamento di livelli, prima fra i livelli discreti e poi fra i livelli discreti così mescolati a quelli del continuo, non è strettamente necessario per produrre l'ionizzazione spontanea. Tuttavia in assenza del mescolamento fra carattere tripletto e singoletto per i livelli discreti, la autoionizzazione sarebbe molto debole e quindi non in grado di spiegare la sparizione delle righe associate al livello $p^2 \ ^3P_2$. Condon e Shortley nel loro libro del 1935 affermano che la discussione di Majorana non è molto convincente, poiché un simile processo di autoionizzazione, con sparizione delle righe di assorbimento, dovrebbe applicarsi anche al livello $p^2 \ ^3P_0$. Di conseguenza

⁽¹⁰⁾ C. W. CLARK, in "A Century of Excellence in Measurements, Standards, and Technology" NIST Special Publication 958, a cura di David R. Lide (Washington, DC USA) 2001, p. 116.

⁽¹¹⁾ B. W. SHORE, *Phys. Rev.* **171** (1968) 43.

le identificazioni spettroscopiche e lo schema di autoionizzazione di Majorana non sono state accettate per un lungo tempo. La storia delle linee spettrali mancanti termina nel 1955 quando W. R. S. Garton e A. Rajaratnam⁽¹²⁾ furono capaci di identificare nello spettro di Zn le deboli righe di assorbimento terminanti nel livello $p^2\ ^3P_2$ ed allargate per autoionizzazione. In seguito, nel 1970, W. C. Martin e V. Kaufman⁽¹³⁾ confermarono la correttezza degli assegnamenti spettroscopici fatti da Majorana. Infine nel 1986⁽¹⁴⁾ e nel 1988⁽¹⁵⁾ due gruppi di ricercatori ad Orsay e Caen misurarono le larghezze di riga associate alla autoionizzazione utilizzando la rivelazione optogalvanica. Gli stessi gruppi di ricercatori fecero anche una precisa trattazione teorica del mescolamento fra i livelli discreti e quelli continui. Pertanto, tutte le righe che appartengono alla configurazione p^2 subiscono perturbazioni dovute alla autoionizzazione, grandi o piccole, seguendo precisamente lo schema previsto da Majorana.

In conclusione, il lavoro di Majorana contiene tre risultati importanti per il progresso della spettroscopia atomica: i) l'identificazione di righe spettrali in Hg, Cd e Zn; ii) un trattamento dell'accoppiamento fra gli elettroni diverso da quello LS di Russell-Saunders; iii) l'introduzione del processo di autoionizzazione.

ENNIO ARIMONDO
NIST, Gaithersburg, MD (USA)

⁽¹²⁾ W. R. S. GARTON e A. RAJARATNAM, *Proc. Phys. Soc. A* **68** (1955) 1107.

⁽¹³⁾ W. C. MARTIN e V. KAUFMAN, *J. Opt. Soc. Am.* **60** (1970) 1096.

⁽¹⁴⁾ M. AYMAR, E. LUC-KOENING, M. CHANTEPIE, J. L. COJAN, J. LANDAIS e B. LANIEPCE, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **19** (1986) 3881.

⁽¹⁵⁾ M. CHANTEPIE, B. CHERON, J. L. COJAN, J. LANDAIS, B. LANIEPCE e M. AYMAR, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **21** (1988) 1379.

Theory of the incomplete P' triplets^(*)

ETTORE MAJORANA

Summary. — Most of the anomalous triplets above the limit of the normal series are stable if relativistic corrections are neglected. The presence of intrinsic magnetic moments produces a small instability that only in exceptional cases can have a quantitative importance. The necessary conditions for such a case to occur are satisfied by the component $j=2$ of the anomalous triplets of Zn, Cd and Hg. Experimentally the component 3P_2 of these triplets seems absent or weak.

Five groups of terms, each one with six lines, are known in the calcium spectrum that can be attributed to combinations of the term $1s2p{}^3P_{012}$ (current empirical numbers) with a succession of triplets ${}^3P'_{012}$ that can be ordered as a series. However the limit of this series corresponds to Ca^+ with the external electron in the orbit $3d$ and not in the fundamental orbit $1s$ as happens in normal series. This fact, together with some other indications, suggests to attribute to the P' triplets of calcium the configuration $3dnd{}^3P_{012}$ ($n = 3, 4, 5, \dots$). These states therefore correspond to excitation of two electrons. What we want to point out, apropos of these anomalous terms of calcium, is that only some of them are above the ionization potential in the continuous spectrum and nevertheless are stable, *i.e.* they do not give rise to an appreciable spontaneous ionization. There is nothing strange in this as it would be easy to prove that in the non-relativistic approximation such terms have a symmetry character which rigorously forbids transitions to the continuous spectrum. In other elements however, in particular in Zn, Cd and Hg, P' triplets are known above the ionization potential that should be stable for the same

(*) Translated from "Il Nuovo Cimento", vol. 8, 1931, pp. 107-113, by P. Radicati di Brozolo.

reasons; however the component P'_2 is absent, whereas P'_1 and P'_0 have been observed. These terms of Zn, Cd and Hg are analogous to those of calcium mentioned above, even though they arise from different configurations (pp instead of dd). Here we want to study why in this case the component P'_2 is absent. FOOTE, TAKAMINE and CHENAULT⁽¹⁾ have suggested, only for the case of Cd and to explain some anomalies in the intensities, that the term P'_2 exists but is accidentally so close to P'_1 to make it impossible to separate the two. This looks to me difficult to believe both because it violently contradicts the rules of the normal coupling and also because it is disproved by the lack of analogous terms in Zn and Hg. I also want to point out that SAWYER⁽²⁾ has suggested that for Zn, at exactly the same position of the non-existing lines ${}^3P'_2 - {}^3P_2$ and ${}^3P'_2 - {}^3P_1$, two lines ${}^1D_2 - {}^3P_2$ and ${}^1D_2 - {}^3P_1$ exist and that both are weaker and of a different aspect from those of the remaining four lines of the group PP' (here 1D_2 is one of the states arising from two orbits $2p$). According to the present theory, the lines of SAWYER are instead precisely the lines ${}^3P'_2 - {}^3P_2$ and ${}^3P'_2 - {}^3P_1$ that complete the PP' group. These lines are weaker since the term ${}^3P'_2$ is unstable because of the AUGER effect; this is due to spin-orbit interaction. Instead the lines that arise from term 1D_2 should not be observable because the instability of this term is much larger, as it is not contrasted by its symmetry characters even if we disregard the electron magnetic moment.

1. Without electron rotation, from two equivalent orbits $2p$ we obtain the terms 1D , 3P and 1S (the multiplicity indices only denote the symmetry or antisymmetry of the center-of-mass eigenfunction). Their separation depends, in the first approximation, upon a single parameter and can be calculated with SLATER's method⁽³⁾. One finds that 3P is the deepest state, 1S the highest and the distance ${}^1S - {}^1D$ is $3/2$ of the distance ${}^1D - {}^3P$. The order of magnitude of the absolute value of the separation can be estimated by using approximate eigenfunctions. The results of this method are in good agreement with the observed values, for example for the deep terms of silicon. However in some cases the first approximation is insufficient, as for example for magnesium, where the term $(2p)^2 {}^3P_{012}$ is known and, if SAWYER's⁽⁴⁾ interpretation is correct, also the $(2p)^2 {}^1D_2$ one. The term 1D_2 is actually higher than ${}^3P_{012}$ as it follows from SLATER's method but the separation is only a few hundred cm^{-1} and not several thousand as the method would predict. The anomaly can perhaps be attributed to the predominant influence of the continuous spectrum and in particular to the influence of the "virtual state" $(3d)^2 {}^1D_2$ on the term $(2p)^2 {}^1D_2$. The same reasoning could apply to the terms $(2p)^2 {}^3P_{012}$ and $(2p)^2 {}^1D_2$ of Zn, Cd and Hg. In this case however the terms are above the ionization limit and, if we disregard the magnetic moment of the electron, only the first one is stable because it is a *reflected* term⁽⁵⁾, whereas the states in the continuous

⁽¹⁾ P. D. FOOTE, T. TAKAMINE and R. L. CHENAULT, "Phys. Rev.", *26*, 174 (1925).

⁽²⁾ R. A. SAWYER, "J. Opt. Soc. Am.", *13*, 431 (1926).

⁽³⁾ J. C. SLATER, "Phys. Rev.", *34*, 1293 (1929).

⁽⁴⁾ R. A. SAWYER, loc. cit.

⁽⁵⁾ E. WIGNER, "Z. Physik", *43*, 624 (1927).

spectrum belonging to the same energy have a normal symmetry. The term $(2p)^2\ ^1D_2$ is instead a "virtual state" in the sense of BECK⁽⁶⁾ and its energy, which is not exactly defined, is slightly greater than that of $(2p)^2\ ^3P_{012}$. However, the interaction between the intrinsic momentum and the orbital one of each of the two electrons establishes a mutual influence between the virtual state $(2p)^2\ ^1D_2$ and the component of $(2p)^2\ ^3P_{012}$ that belongs to the same value of the internal quantum ($j = 2$). As a consequence also $\ ^3P_2$ becomes unstable and can give rise to a spontaneous ionization which means a transition *without radiation* from triplets to singlets. The closeness of a virtual state with appropriate symmetry characters is necessary only if the AUGER effect has to acquire a sizable importance; but even when that is absent, as is the case for the component $\ ^3P_1$, or when it is sufficiently far away, as the virtual state $(2p)^2\ ^1S_0$ for the component $\ ^3P_0$, we can expect a weak instability which can explain the anomalies of the intensities that one observes in the remaining lines of the group PP' . Let us then premise a few general considerations on the influence of the intrinsic magnetic moment in all the states $\ ^1D_2\ ^3P_2\ ^3P_1\ ^3P_0\ ^1S_0$ arising from two orbits $2p$. For sufficiently high atomic numbers, we can neglect the magnetic interaction between the two electrons and only take into account the interaction between the constant electric field arising from the remaining atomic cloud and the magnetic moment of the moving electrons which is the so-called spin-orbit coupling. The perturbation is thus described by the Hamiltonian

$$(1) \quad H = f(r_1)(s_1, M_1) + f(r_2)(s_2, M_2),$$

where s_1, s_2 and M_1, M_2 are the intrinsic and orbital momenta of the two electrons measured in units of $h/2\pi$ and $f(r)$ is a function of the radius proportional to $\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$. Let us choose the coordinate system so that the unperturbed energy be diagonal and let us further suppose that the unperturbed eigenfunctions can, with sufficient approximation, be expressed as linear combinations of products of the eigenfunctions of the single electrons; these functions represent individual stationary states in an appropriate central field. Then the matrix of H can be conveniently represented as a sum of products of the matrices $f(r_1)$ and $f(r_2)$, that can be easily evaluated through quadratures, times the matrices (s_1, M_1) and (s_2, M_2) . In this approximation the latter are constant matrices, *i.e.* that link only states with equal energies, because so are the matrices s_1, M_1, s_2 and M_2 , separately. However the functions that depend upon the coordinates of a *single* electron, as $f(r_1), s_1, M_1$ etc. are not physical quantities. We can formally consider them as such and express them by matrices only if we renounce PAULI's principle and include also complete non-antisymmetrical eigenfunctions. In the case of only two electrons the resulting complication is not too great because we need to consider only one symmetry character that does not follow PAULI's principle, *i.e.* that of symmetrical eigenfunctions. For example we should further add to the terms already considered the following terms arising from two orbits $2p$: we shall write them in brackets to recall that they do not satisfy PAULI's principle ($\ ^3D_{123}$) ($\ ^1P_1$) ($\ ^3S_1$). For each individual value of j all terms are

(6) G. BECK, "Z. Physik", 62, 331 (1930).

listed below:

$$(2) \quad \begin{cases} j = 3 : ({}^3D_3) \\ j = 2 : ({}^1D_2, {}^3P_2, ({}^3D_2)) \\ j = 1 : ({}^3P_1, ({}^3D_1), ({}^1P_1), ({}^3S_1)) \\ j = 0 : ({}^3P_2, {}^1S_0) \end{cases}$$

Each of these terms is $(2j + 1)$ times degenerate. Therefore we naturally have all together 36 states since each electron can be in 3 (orbital degeneration) \times 2 (intrinsic degeneration) = 6 different states with no effect of the exclusion principle. The matrices (s_1, M_1) and (s_2, M_2) , that in first approximation interconnect only the states of (2), can be constructed directly but we will not enter the details of the calculation. If we refer the rows and columns to the various states in the order in which these appear in (2) the matrices are:

$$j = 3 \quad (s_1, M_1) = (s_2, M_2) = \frac{1}{2}$$

$$j = 2 \quad (s_1, M_1) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (s_2, M_2) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$j = 1 \quad (s_1, M_1) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(s_2, M_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$j = 0 \quad (s_1, M_1) = (s_2, M_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}.$$

These equations are valid for each allowed value of the magnetic quantum. We obtain in this way the following expressions of $H\psi$ for the components of the triplets P' :

$$(3) \quad \begin{cases} H^3 P_2 = \frac{f(r_1) + f(r_2)}{4} {}^3P_2 + \frac{f(r_1) + f(r_2)}{2\sqrt{2}} {}^1D_2 + \sqrt{3} \frac{f(r_1) - f(r_2)}{4} ({}^3D_2) \\ H^3 P_1 = -\frac{f(r_1) + f(r_2)}{4} {}^3P_1 + \sqrt{5} \frac{f(r_1) - f(r_2)}{4\sqrt{3}} ({}^3D_1) + \\ \quad + \frac{f(r_1) - f(r_2)}{2\sqrt{2}} ({}^3P_1) - \frac{f(r_1) - f(r_2)}{\sqrt{3}} ({}^3S_1) \\ H^3 P_0 = -\frac{f(r_1) + f(r_2)}{2} {}^3P_0 + \frac{f(r_1) + f(r_2)}{\sqrt{2}} {}^1S_0. \end{cases}$$

According to WENTZEL's formula⁽⁷⁾ the squares of the coefficients in the expansion of $H\psi$ for states in the continuous spectrum having the same energy as ψ are proportional, in absolute value and in *first approximation*, to the probability of spontaneous ionization. The various terms in the second members of (3) are *even* functions and those that belong to $L = l$ are orthogonal to the states of the continuous spectrum having the same energy as the triplet P' , because those states come from one electron $1s$ and one in a hyperbolic orbit and can be even for $L = 0, 2, 4, \dots$, or odd for $L = 1, 3, 5, \dots$. The other terms in the right-hand sides of (3) are *usually* almost orthogonal to the same states in the continuous spectrum because of the different angular dependence. They would be exactly orthogonal if one were to neglect the polarization. Furthermore, they all have a common $f(r)$ factor which is of the order of the relativistic effects; since the AUGER effect depends upon the square of the relevant components of H , we can conclude that the effect is *usually* very weak for the terms we are considering. The situation is different if a virtual state is present with almost the same energy, as 1D_2 for the component 3P_2 . Also 1S_0 is a virtual state that could influence the stability of 3P_0 ; however it is too far and the distance is increased by relativistic effects. Coming back to 1D_2 this state could be described as an eigenfunction whose time dependence is of the form $e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E_0 t} e^{-\frac{t}{2T}} = e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E t}$, where $E = E_0 + \frac{\hbar}{4\pi i T}$ is a *complex* eigenvalue. This expression for ψ is valid of course only if both electrons are in a region of the order of the atomic dimensions. Let us now suppose that the uncertainty $a = \frac{\hbar}{4\pi T}$ of the 1D_2 (*) energy and the distance d between E_0 and the energy of 3P_2 (including the diagonal term of the perturbation H) are small compared to the (negative) value of the term. Let us further define $\Delta = \frac{3}{2} \overline{f(r)}$, with the

(7) G. WENTZEL, "Z. Physik", 43, 524 (1927).

(*) Note that in the original text of "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed 3P_2 . (Note of the Editor.)

average value $\overline{f(r)}$ calculated on an orbit $2p$, which represents the difference between the energies of the extreme components of the normal triplet $1s2p, {}^3P_{012}$ or, which is the same in first approximation, the separation of the anomalous triplet $(2p)^2 {}^3P_{012}$. Let us further suppose that also Δ be small in the same sense. Then one can use a very simple formalism whose justification can easily be based on the properties of those periodic solutions that belong to a narrow region of the continuous spectrum in terms of which the arbitrarily limited virtual state 1D_2 can in practice be expanded. The study of the influence of 1D_2 on 3P_2 is thus reduced to an ordinary perturbation problem and one has to determine the (complex) eigenvalues and the (non-orthogonal) eigenvectors of the matrix:

$$\begin{array}{l} {}^1D_2 \\ {}^3P_2 \end{array} \left| \begin{array}{cc} d - ai & \frac{\sqrt{2}}{3} \Delta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \Delta & 0 \end{array} \right|.$$

The absolute value of the imaginary coefficient of the perturbed eigenvalue of 3P_2 is a measure of the energy uncertainty (half-width) of this state. If we divide it by $h/4\pi$ we obtain the probability per unit time of spontaneous ionization. If Δ is sufficiently small compared to $\sqrt{d^2 + a^2}$, which is not necessarily true, the half-width of the term 3P_2 is $\frac{2}{9} \frac{\Delta^2}{d^2 + a^2} a^*$. When $a \rightarrow 0$ this formula has a simple meaning: it says that to obtain the probability of ionization of 3P_2 , it is enough to multiply the probability for 1D_2 by the contribution of 1D_2 in the perturbed 3P_2 , according to common perturbation theory. For large values of a , which means for great instability of 1D_2 , the instability induced in 3P_2 decreases again after having reached a maximum: this should be interpreted in the sense that an exceedingly unstable state 1D_2 ceases to be "a virtual state" whose presence is in any case necessary for the AUGER effect of the term $(2p)^2 {}^3P_2$ to become quantitatively relevant.

(*) Note that in the original text of "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed $\frac{2}{9} \frac{\Delta^2}{d^2 + a^2} a^2$.
(Note of the Editor.)

Comment on the Scientific Paper no. 5 : "Theory of the incomplete P' triplets".

This paper, published in 1931 while Majorana was in Rome after receiving his doctoral degree, deals with an atomic spectroscopy problem, the characterization of spectra of different atoms with two electrons in the outer shell. The study was stimulated by experimental observations published in 1925 by P. Foote *et al.* of the *National Bureau of Standards of the US Department of Commerce, Washington DC* (the predecessor of the *US National Institute of Standards and Technology*), see ref. (1) of the original paper. The experimental finding was that some predicted lines in the absorption spectra of Hg, Cd and Zn atoms were missing. More precisely, of the three lines expected for transitions to the lowest $p^2\ ^3P_{0,1,2}$ triplet levels, those associated with the 3P_2 level were not observed in any of these spectra. Majorana presented a theoretical explanation of those results introducing a new process he designates as *spontaneous ionization*.

At that time, deviations of energy levels and line intensities from the simple formulas for ordinary atomic series were already known for line series belonging to atoms (or ions) with several electrons in the outer shell. These deviations are known as perturbations. The perturbations are produced by a resonance process where two (or more) energy levels are nearly degenerate, and their wave functions are mixed up by the interactions between electrons. As a consequence, the new mixed wave functions are the solutions of the Schrödinger equation, with new energy eigenvalues and new transition probabilities for absorption of light. Majorana introduced a new kind of perturbation, proposing that the $p^2\ ^3P_{0,1,2}$ levels are modified by the interaction with levels in the continuum. Thus, level mixing takes place between discrete and continuum levels. Owing to the perturbation the discrete levels acquire features ordinarily seen only in continuum transitions: large natural linewidths, line asymmetries and intensity anomalies in emission or absorption of radiation. For instance, the mixed discrete level may decay through a radiationless transition process, which converts the excited atom into a free electron and a positive ion. This decay constitutes the "spontaneous ionization" process identified by Majorana. It is equivalent to the Auger process then known in X-ray emissions, which is mentioned at the end of Majorana's paper. A similar process, discussed by R. de L. Kronig a few years earlier⁽¹⁾, is the radiationless dissociation of a molecule when the sum of its vibrational and electronic energies exceeds the energy necessary for dissociation in a lower energy electronic configuration.

⁽¹⁾ R. de L. KRONIG, *Z. Phys.* **50** (1928) 347.

The spontaneous ionization process in optical spectra of atoms was introduced independently in the same year by A. G. Shenstone of Princeton University in a publication in *The Physical Review*⁽²⁾. Shenstone analyzed a $^3P_2^0$ level of mercury that had been recently discovered by T. Takamine and T. Suga⁽³⁾ and confirmed by F. Paschen⁽⁴⁾. Shenstone identified the same process as Majorana, but called it *auto-ionization*, a name which has since become standard in the literature of atomic spectroscopy (usually as *autoionization*). The attention of Shenstone was really concentrated on copper whose spectrum is unique with autoionization being the rule rather than the exception, as stated in his detailed report of 1936⁽⁵⁾.

In an important later work in 1935⁽⁶⁾, H. Beutler of the University of Berlin published a detailed investigation of the absorption spectra of noble gases for levels above the ionization limit. In that study, Beutler ascribes the observed strong asymmetric modulations of the absorption lines to the autoionization process, and refers to Kronig's and Shenstone's previous work, but not to Majorana's. *The Theory of Atomic Spectra*, published by E. U. Condon and G. H. Shortley in 1935⁽⁷⁾, often called the "bible" of atomic spectroscopy, recognizes the simultaneous and independent contributions of Majorana and Shenstone in identifying the autoionization concept yet. In the same year, Beutler's work caught the attention of E. Fermi in Rome, who suggested to a junior associate, U. Fano, that he find a specific explanation for the line shapes seen by Beutler. In fact, as described by Fano himself, the hypothesis of autoionization alone does not provide a description of the asymmetrically broadened lines. Fano soon produced a theoretical analysis of the mixing of a discrete level with a continuum published in 1935⁽⁸⁾. This work, and Fano's more complete analysis published in 1961⁽⁹⁾, introduced the Beutler-Fano autoionization profile, a lineshape formula that has found wide applicability in many branches of physics. Fano's work at NIST in the 1960s, and the contemporaneous development in experimental techniques for extreme ultraviolet spectroscopy, again mainly at NIST, elevated the Beutler-Fano lineshapes to a frontier research topic in atomic physics, as described in a short report by C. W. Clark in 2001⁽¹⁰⁾. Autoionization has played an important role in the progress of spectroscopy, because it is observed in a large variety of atomic and molecular spectra, and very different results are obtained for the energy and probabilities of the mixed levels.

⁽²⁾ A. G. SHENSTONE, *Phys. Rev.* **38** (1931) 873.

⁽³⁾ T. TAKAMINE and T. SUGA, *Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res. Tokyo* **13** (1930) 1.

⁽⁴⁾ F. PASCHEN, *Ann. Phys. (Leipzig)* **6** (1930) 47.

⁽⁵⁾ A. G. SHENSTONE, *Philos. Trans. Roy Soc. London* **235** (1936) 195.

⁽⁶⁾ H. BEUTLER, *Z. Phys.* **93** (1935) 177.

⁽⁷⁾ E. U. CONDON and G. H. SHORTLEY, "Theory of Atomic Spectra" (Cambridge University Press) 1935.

⁽⁸⁾ U. FANO, *Nuovo Cimento* **12** (1935) 154.

⁽⁹⁾ U. FANO, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1866.

⁽¹⁰⁾ C. W. CLARK, in "A Century of Excellence in Measurements, Standards, and Technology" NIST Special Publication 958, edited by David R. Lide (Washington, DC USA) 2001, p. 116.

The 1931 Majorana analysis does not calculate the autoionization absorption spectra. Moreover, instead of describing the continuum through a continuous distribution of states as in the Fano analyses, Majorana mixes a discrete level having a negligible decay rate with a single level that simulates the continuum through its large linewidth, denoted by the quantity “ a ” introduced at the bottom of page 105. Furthermore, Majorana does not derive the transition probability for the absorption process. Even if the description by Majorana is not complete, the diagonalization of the perturbation matrix he writes down on the last page of his paper would produce an expression for the absorption lineshape having the characteristic sawtooth profile of autoionization. Such a lineshape derivation was reported by B. W. Shore in 1968⁽¹¹⁾.

The mixing of discrete and continuum states introduced by Majorana and leading to autoionization is complex. Autoionization mixing may occur whenever a discrete level above the ionization limit is embedded in a continuum with the same parity and angular momentum. For the case of the $p^2\ ^3P_2$ levels of Hg, Cd and Zn, no 3P_2 continuum of even parity is available for the autoionization mixing. Therefore, Majorana argued that the electron coupling is sufficiently removed from the strict LS Russell-Saunders case, so that the discrete levels share $p^2\ ^3P_2$ and $sd\ ^1D_2$ characteristics. Thus, the discrete level acquires the singlet character necessary to autoionize readily into the $sd\ ^1D_2$ continuum. As pointed out by Majorana, this complicated double interaction mixing, between discrete states and between discrete and continuum states, is not strictly required to produce the spontaneous ionization. However, in the absence of a singlet admixture in the triplet state, the autoionization mixing would not have been large enough to explain the disappearance of the lines associated with the $p^2\ ^3P_2$ level. In their 1935 book, Condon and Shortley stated that the Majorana argument is not entirely convincing, because a similar autoionization process should apply also to the $p^2\ ^3P_0$ level. Therefore, for a long time the spectroscopic assignments and the autoionization scheme proposed by Majorana remained under scrutiny. The story of the missing lines ended in 1955 when W. R. S. Garton and A. Rajaratnam⁽¹²⁾ were able to identify the weak autoionization-broadened absorption lines of Zn terminating on the $p^2\ ^3P_2$ level. In 1970, W. C. Martin and V. Kaufman⁽¹³⁾ pointed out the correctness of Majorana’s spectroscopic assignments. Finally, between 1986 and 1988 research groups in Orsay and Caen measured the Cd⁽¹⁴⁾ and Zn⁽¹⁵⁾ autoionization linewidths using optogalvanic detection and produced a precise derivation of the perturbation mixing for the discrete and continuum levels. Therefore, all the lines belonging to the p^2 configuration suffer perturbations by autoionization, large or small, following precisely the scheme predicted by Majorana.

⁽¹¹⁾ B. W. SHORE, *Phys. Rev.* **171** (1968) 43.

⁽¹²⁾ W. R. S. GARTON and A. RAJARATNAM, *Proc. Phys. Soc. A* **68** (1955) 1107.

⁽¹³⁾ W. C. MARTIN and V. KAUFMAN, *J. Opt. Soc. Am.* **60** (1970) 1096.

⁽¹⁴⁾ M. AYMAR, E. LUC-KOENING, M. CHANTEPIE, J. L. COJAN, J. LANDAIS and B. LANIEPCE, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **19** (1986) 3881.

⁽¹⁵⁾ M. CHANTEPIE, B. CHERON, J. L. COJAN, J. LANDAIS, B. LANIEPCE and M. AYMAR, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **21** (1988) 1379.

In conclusion, the Majorana paper contains three remarkable steps for the progress of atomic spectroscopy: i) an identification of spectral lines in Hg, Cd and Zn; ii) a treatment of the electron coupling for a case other than the LS Russell-Saunders case; iii) the introduction of the autoionization process.

* * *

EA is grateful to W. C. CLARK for carefully reading the English translation of the original paper and of his comment, and for useful suggestions.

ENNIO ARIMONDO
NIST, Gaithersburg, MD (USA)

Atomi orientati in campo magnetico variabile

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Il Nuovo Cimento”, vol. 9, 1932, pp. 43-50.

Sunto. — L'autore calcola la probabilità che abbiano luogo processi non adiabatici quando un raggio di vapore orientato passa in prossimità di un punto in cui il campo magnetico si annulla.

Un atomo orientato in un campo magnetico lentamente variabile segue, come è noto, adiabaticamente la direzione, supposta variabile, del campo. A ciò si deve il fatto recentemente posto in evidenza che sottoponendo un raggio molecolare proveniente da una esperienza di STERN e GERLACH a una seconda esperienza di STERN e GERLACH non si ottiene una nuova divisione del raggio, perché tutti gli atomi hanno la stessa orientazione, avendo seguito esattamente il campo vagante, difficilmente eliminabile, nel tratto compreso fra le espansioni polari destinate a produrre il raggio orientato e quelle che devono saggiarne l'orientazione dopo un certo percorso. Tuttavia PHIPPS ha intrapreso delle esperienze per rivelare una variazione non adiabatica del campo in detta regione; la condizione a ciò necessaria è che il campo sia sufficientemente debole e la variazione della sua direzione sufficientemente rapida perché la sua frequenza di rotazione divenga comparabile con la frequenza di LARMOR. Poiché è difficile abbassare l'intensità del campo al disotto di alcuni gauss⁽¹⁾, è necessario, per una velocità del raggio di 10^5 cm/sec, che la direzione del campo vari di molto entro una frazione di millimetro; si tratta quindi di esperienze delicate che non hanno dato finora esito conclusivo.

(¹) T. E. PHIPPS e O. STERN, “Z. Physik”, 73, 185 (1932).

Il problema è stato trattato teoricamente da GÜTTINGER⁽²⁾ per il caso di un campo rotante uniformemente e di intensità costante. In questa nota supporremo invece che il raggio molecolare passi in prossimità di un punto in cui il campo magnetico si annulli; questo caso è particolarmente importante perché se il raggio passasse esattamente per un punto di campo nullo tutti gli atomi invertirebbero la loro orientazione.

D'altra parte un punto di campo nullo non può essere portato sul percorso del raggio molecolare che per tentativi, disponendo, ad esempio, di due campi ausiliari ortogonali indipendentemente regolabili, così che è difficile realizzare l'esperienza fino a che non si disponga di mezzi rapidi per la rivelazione del raggio. Ne anticipiamo tuttavia la discussione anche per meglio chiarire la natura del problema dinamico offerto dalla rotazione di un atomo magnetico in campo comunque variabile. Risulterà da quanto segue che la trattazione del problema secondo la meccanica classica o secondo la meccanica quantistica richiede l'integrazione delle stesse equazioni differenziali, cosicché quando la soluzione classica è nota, come nel caso di un campo uniforme rotante con velocità angolare costante, particolarmente considerato da GÜTTINGER, la soluzione quantistica può esserne dedotta immediatamente. Per il problema che studieremo più avanti, passaggio in prossimità di un punto di campo nullo con gradiente di campo lentamente variabile, l'impostazione quantistica è matematicamente più conveniente; ma anche qui basta risolvere il caso più semplice, $j = 1/2$, per dedurre la soluzione generale.

1. Uno stato rotazionale di un atomo con quanto interno $j = 1/2$ può essere rappresentato come combinazione lineare dei due stati ortogonali $\psi_{1/2}$ e $\psi_{-1/2}$ aventi momento $\pm 1/2$ in direzione dell'asse z :

$$\psi = C_{1/2}\psi_{1/2} + C_{-1/2}\psi_{-1/2}$$

ed è essenzialmente definito dal rapporto $\frac{C_{-1/2}}{C_{1/2}}$.

Se le fasi di $\psi_{1/2}$ e $\psi_{-1/2}$ ^(*) sono scelte in modo da dare la rappresentazione ordinaria dei momenti angolari, lo stato ψ può essere rappresentato, come è noto, in modo invariante da un punto P su una sfera unitaria, le cui coordinate sferiche ϑ , φ sono definite da^(**)

$$\text{tang} \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} = \frac{C_{-1/2}}{C_{1/2}}.$$

⁽²⁾ P. GÜTTINGER, "Z. Physik", 73, 169 (1932).

^(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è erroneamente stampato $\psi_{1/2}$. (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

^(**) Ne "Il Nuovo Cimento" è erroneamente stampato $\text{tang} \frac{\vartheta}{z}$ qui e successivamente in eq. (3). (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

Il raggio vettore OP , essendo O il centro della sfera, dà allora la direzione secondo la quale il momento nello stato ψ ha il valore $1/2$. Nel caso $j = 1/2$ il più generico stato rotazionale corrisponde quindi ad atomi orientati con momento $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ in una direzione arbitraria. La probabilità d'accordo fra due stati rappresentati dai punti P e P' è data da

$$W(P, P') = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

se α è l'angolo POP' ; essa si annulla, cioè i due stati sono ortogonali, quando P e P' sono diametralmente opposti. Per $j > 1/2$ non esiste in generale una direzione secondo cui l'atomo è orientato, ha cioè un valore determinato dal momento angolare, ma una rappresentazione geometrica intrinseca, simile alla precedente, è ancora possibile. Solo ogni stato sarà rappresentato da $2j$ punti sulla sfera unitaria, anzi che da uno solo. Consideriamo infatti uno stato generico:

$$\psi = C_j \psi_j + C_{j-1} \psi_{j-1} + \dots + C_{-j} \psi_{-j}$$

e siano $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2j}$ le radici dell'equazione:

$$(1) \quad a_0 \zeta^{2j} + a_1 \zeta^{2j-1} + \dots + a_{2j} = 0$$

essendo

$$(2) \quad a_r = (-1)^r \frac{C_j - r}{\sqrt{(2j - r)!r!}}.$$

Lo stato ψ può allora essere rappresentato dai punti P_1, P_2, \dots, P_{2j} sulla sfera unitaria, le coordinate sferiche ϑ_s, φ_s di P_s essendo date da

$$(3) \quad \text{tang} \frac{\vartheta_s}{2} e^{i\varphi_s} = \zeta_s.$$

Si verifica senza difficoltà che questa rappresentazione geometrica non dipende dal sistema di coordinate. La disposizione dei punti rappresentativi è a priori arbitraria, ma diviene particolarmente semplice se si considerano atomi orientati. A uno stato orientato con componente del momento angolare m nella direzione OP corrispondono infatti $j + m$ punti coincidenti in P e $j - m$ nel punto diametralmente opposto a P , come se ognuno dei punti rappresentativi indicasse la direzione di un piccolo giroscopio con momento angolare $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. La probabilità di accordo fra due stati orientati, l'uno con momento m nella direzione OP , l'altro con momento m' nella direzione OP' formante con la prima

l'angolo α , è data da

$$(4) \quad W(P, P'; m, m') = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{4j} (j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')! \\ \left[\sum_0^r \frac{(-1)^r \left(\text{tang} \frac{\alpha}{2} \right)^{2r-m+m'}}{r!(r-m+m')!(j+m-r)!(j-m'-r)!} \right]^2$$

ed è naturalmente simmetrica in m e m' .

Consideriamo ora la rotazione dell'atomo in un campo magnetico $H(t)$ comunque variabile nel tempo. Supponiamo perciò che l'atomo possieda un momento magnetico $-gj\mu_0$ così che per campo sufficientemente debole si può assumere come Hamiltoniana $g\mu_0(j, H)$. Le equazioni del movimento saranno allora:

$$\dot{C}_m = -\frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left[mH_z C_m + \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \frac{H_x - iH_y}{2} C_{m-1} + \right. \\ \left. + \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{H_x + iH_y}{2} C_{m+1} \right].$$

Sostituendo mediante (2) abbiamo

$$\dot{a}_r = -\frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left[(j-r)H_z a_r - (r+1) \frac{H_x - iH_y}{2} a_{r+1} - \right. \\ \left. - (2j-r+1) \frac{H_x + iH_y}{2} a_{r-1} \right].$$

Uguagliando a zero la derivata temporale del primo membro di (1) troviamo, dopo facili riduzioni, per una generica radice ζ_i di detta equazione:

$$\dot{\zeta}_i = \frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left(H_z \zeta_i + \frac{H_x - iH_y}{2} \zeta_i^2 - \frac{H_x + iH_y}{2} \right)$$

da cui seguono mediante la (3) le variazioni temporali di ϑ_i , φ_i relative al punto rappresentativo P_i di cui ζ_i è la proiezione stereografica sul piano complesso $x + iy$:

$$\dot{\vartheta}_i = \frac{2\pi}{h} g\mu_0 (H_y \cos \varphi_i - H_x \sin \varphi_i), \\ \dot{\varphi}_i = \frac{2\pi}{h} g\mu_0 \left(H_z - \frac{H_x \cos \varphi_i + H_y \sin \varphi_i}{\text{tang} \vartheta_i} \right).$$

Queste equazioni esprimono che ciascuno dei punti rappresentativi sulla sfera unitaria precede intorno al campo con frequenza $g \cdot o$, essendo o la frequenza di LARMOR, come accadrebbe nella meccanica classica se uno qualsiasi dei raggi vettori OP_i indicasse la direzione di un giroscopio di autoimpulso $j \frac{h}{2\pi}$ e momento magnetico $-gj\mu_0$. Si può del

resto provare che la validità di questo risultato è implicita nell'invarianza della nostra rappresentazione geometrica, e viceversa.

Da quanto si è detto risulta anche che la posizione relativa dei $2j$ punti rappresentativi resta invariata nel corso del tempo, cosicché se inizialmente l'atomo è orientato con componente del momento angolare m in direzione del campo, esso sarà ancora orientato al tempo t con momento m secondo una direzione formante un angolo $\alpha(t)$ con il campo. La conoscenza dell'angolo di sbandamento $\alpha(t)$, che può essere calcolato indifferentemente con la meccanica classica o con la meccanica quantistica ed è indipendente da j e da m permette di calcolare mediante la (4) la probabilità che la componente del momento angolare nella direzione del campo abbia al tempo t il valore generico m' .

2. Supponiamo ora che un raggio di atomi orientati passi in prossimità di un punto Q in cui $H_x = H_y = H_z = 0$; in vicinanza di Q le componenti del campo saranno funzioni lineari delle coordinate cartesiane x, y, z , e, in un sistema solidale con l'atomo in movimento, che con grande approssimazione possiamo ritenere rettilineo e uniforme, le componenti del campo agente sull'atomo stesso saranno funzioni lineari del tempo. Scegliamo l'asse x nella direzione che ha il campo quando esso raggiunge la minima intensità, ciò che accadrà in generale a non grande distanza da Q , e l'asse z nella direzione della derivata temporale, cambiata di segno, del campo magnetico, che è naturalmente normale alla precedente. Assumiamo inoltre come origine dei tempi, l'istante in cui il campo è minimo. Le componenti del campo a cui l'atomo è sottoposto in un istante generico avranno la forma:

$$H_x = A; \quad H_y = 0; \quad H_z = -Ct.$$

Supponiamo $j = 1/2$ ponendo $\psi = \xi\psi_{1/2} + \eta\psi_{-1/2}$ (*); le equazioni del moto saranno

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\pi i}{h} g\mu_0(-Ct\xi + A\eta), \\ \dot{\eta} &= -\frac{\pi i}{h} g\mu_0(A\xi + Ct\eta). \end{aligned}$$

A fine di operare con variabili prive di dimensioni, introduciamo una nuova misura del tempo(**):

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2h} g\mu_0 C} \cdot t$$

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ sono erroneamente stampati in linea. (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

(**) Ne "Il Nuovo Cimento" è erroneamente stampato $\frac{\pi}{zh}$. (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

e la grandezza numerica

$$k = \frac{2\pi g \mu_0 A^2}{hC}$$

che dà il rapporto fra la frequenza di precessione dell'atomo e la frequenza di rotazione della direzione del campo quando questo rapporto ha il valore minimo, cioè per $\tau = 0$. Se il raggio di vapore passa con velocità v a una distanza d dal punto Q , nelle cui vicinanze regnano gradienti di campo dell'ordine di G gauss per cm, $k^{(*)}$ risulterà dell'ordine di $10^7 G \frac{d^2}{v}$; per es., per $v = 10^5$ e $G \sim 1$ sarà $k \sim 100 d^2$ e così $k \sim 1$ per $d = 1$ mm. Nelle nuove variabili avremo:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -i(-2\tau\xi + \sqrt{k}\eta) \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -i(\sqrt{k}\xi + 2\tau\eta) \end{aligned}$$

che possiamo semplificare con la posizione:

$$\xi = e^{i\tau^2} f; \quad \eta = e^{-i\tau^2} g$$

da cui segue:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{df}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{-2i\tau^2}g \\ \frac{dg}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{2i\tau^2}f. \end{cases}$$

Eliminando g troviamo:

$$(6) \quad \frac{d^2 f}{d\tau^2} + hi\tau \frac{df}{d\tau} + kf = 0.$$

Delle soluzioni di questa equazione differenziale possiamo dare una rappresentazione integrale che permette di determinarne l'espressione asintotica per grandi valori, positivi o negativi, di τ ; questo è appunto quanto ci occorre, poiché noi supponiamo che per $\tau = -\infty$ l'atomo sia orientato rispetto al campo e vogliamo determinarne l'orientazione per $\tau \rightarrow \infty$.

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è erroneamente stampato K , come anche a pagina 120, sei righe dal fondo. (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

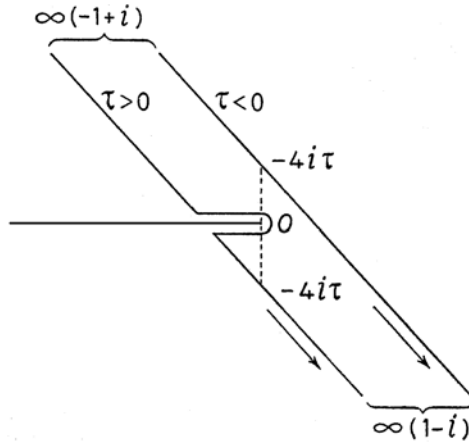
Poiché tutto si riduce a calcolare l'angolo α più sopra definito, basta considerare una sola soluzione della (6). Essa ci è data da

$$f(\tau) = \frac{\sqrt{k} e^{-k\pi/8}}{2(1+i)\sqrt{\pi}} \int s^{(k/4i)-1} e^{(s^2/8i)+s\tau} ds$$

$\log s$ avendo il suo valore principale e la condizione ai limiti

$$\left| s^{k/4i} e^{(s^2/8i)+s\tau} \right|_C = 0$$

essendo soddisfatta se il cammino di integrazione ha la forma indicata nella figura, dove si sono distinti i due casi $\tau < 0$ e $\tau > 0$.



La parte negativa dell'asse reale è linea di discontinuità nella funzione integranda e non può essere attraversata; inoltre, a fine di permettere la valutazione delle espressioni asintotiche i cammini di integrazione si sono fatti passare per il punto di sella $s = -4i\tau$ nella direzione della massima pendenza.

Per $\tau \rightarrow -\infty$ tutto l'integrale proviene dalle vicinanze del punto $s = -4i\tau$ e mediante la sostituzione

$$s = -4i\tau + (1-i)p$$

si calcolano facilmente i primi termini dello sviluppo asintotico di f e, attraverso la prima delle (5), di g . Si trova, trascurando termini che tendono a zero:

$$\tau \rightarrow -\infty; \quad f = 0; \quad g = (-4\tau)^{k/4i}.$$

Per $\tau \rightarrow \infty$ l'espressione asintotica dell'integrale proviene in parte dalle vicinanze del punto di sella $s = -4i\tau$ e in parte da quelle del punto di diramazione O . Si trova in

questo caso:

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty: \quad f &= -\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{k} e^{-k/4i} e^{-k\pi/8} \sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right) \Gamma\left(\frac{k}{4i}\right) \\ g &= (4\tau)^{k/4i} e^{-k\pi/4}. \end{aligned}$$

Badando che per a reale⁽³⁾

$$|\Gamma(ai)| = \sqrt{\frac{\pi}{a \sinh(\pi a)}}$$

oppure tenendo presente la costanza di $|f^2| + |g^2|$ troviamo le seguenti espressioni per $|f|$ e $|g|$:

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow -\infty: \quad & |f| = 0; \quad |g| = 1 \\ \tau \rightarrow \infty: \quad & |f| = \sqrt{1 - e^{-k\pi/2}}; \quad |g| = e^{-k\pi/4}. \end{aligned}$$

Per $\tau \rightarrow -\infty$ il campo è diretto secondo l'asse z , cosicché all'inizio del fenomeno l'atomo ha nella direzione del campo il momento $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$; per $\tau \rightarrow \infty$ il campo è diretto invece secondo $-z$ e il valore limite di $|g^2|$ segna quindi la probabilità che l'atomo inverta la propria orientazione, si trovi cioè ad avere, dopo essere passato nelle vicinanze di Q , un momento $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ nella direzione del campo. Tale probabilità è quindi

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-k\pi/2}.$$

Così per $k = 1$ il 21% e per $k = 2$ il 4,3% degli atomi si capovolgono.

La soluzione generale del problema per j qualsiasi e transizioni da m a m' si avrà dalla (4) sostituendovi il valore dell'angolo α di sbandamento. E poiché nel nostro caso

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

risulta confrontando con l'espressione precedente

$$\alpha = 2 \arcsin e^{-k\pi/4}.$$

(3) Vedi per es. WHITTAKER e WATSON, *Modern Analysis*, IV ed., p. 259.

Commento alla Nota Scientifica n. 6: "Atomi orientati in campo magnetico variabile".

In questo lavoro Majorana calcola la probabilità che gli atomi di un fascio polarizzato in movimento in un campo magnetico variabile invertano il loro spin (*spin-flip*). Si tratta dello studio quantitativo di cosa accade se la variazione della direzione del campo non è adiabatica. Il problema che Majorana trova "particolarmente importante" è cosa succeda quando la variazione del campo magnetico avviene nell'intorno di un valore nullo: "tutti gli atomi invertirebbero la loro orientazione". La questione gli era stata posta da E. Segré, come ricorda E. Amaldi⁽¹⁾.

Infatti E. Segré, insieme a R. Frisch⁽²⁾, stava mettendo a punto un esperimento che generalizzasse le famose indagini di Stern e Gerlach sulla quantizzazione spaziale che erano state compiute con gradienti di campi magnetici statici ed in situazione adiabatica. Si voleva misurare quali fossero gli stati finali di momento magnetico di un atomo inizialmente preparato in uno stato definito e sottoposto ad un campo magnetico che variasse rapidamente. Nell'apparato di Segré e Frisch, la transizione non adiabatica veniva indotta facendo passare il fascio atomico vicino ad un punto dove il campo magnetico si annullava. Le loro misure furono interpretate utilizzando la teoria quantitativa sviluppata da Majorana, che nell'articolo dimostra come l'effetto globale di un campo magnetico variabile su di un corpuscolo con un dato momento angolare ed una data componente m lungo l'asse z possa venir descritto come una brusca rotazione del momento angolare stesso. Risolvendo rigorosamente l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, Majorana ricava l'angolo di rotazione e dimostra che questo dipende dal fattore giromagnetico e dal campo, ma non dal valore m di partenza. Ne segue che, dopo che ha avuto luogo la rotazione, il sistema non è più in uno stato di ben definita quantizzazione spaziale rispetto alla direzione originale del campo, ma deve essere descritto a mezzo di un pacchetto d'onde costituito dalla sovrapposizione di stati con diversi m' . Nell'articolo viene calcolata esplicitamente l'ampiezza di probabilità di transizione da un livello m ad un livello m' . Majorana individua subito nel problema fisico due frequenze caratteristiche:

⁽¹⁾ E. AMALDI, *op. cit.* e la traduzione in inglese *Ettore Majorana, man and scientist in Strong and Weak Interactions, Present Problems, International School of Physics Ettore Majorana, Erice, June 19th - July 4th 1966*, a cura di Zichichi A. (Academic Press, New York and London) 1966.

⁽²⁾ R. FRISCH e E. SEGRÉ, "Ricerche sulla quantizzazione spaziale", *Nuovo Cimento* **10** (1933) 78; "Über die Einstellung der Richtungsquantelung" *Z. Phys.*, **80** (1933) 610.

la frequenza di precessione di Larmor del dipolo magnetico atomico e la frequenza di rotazione del campo magnetico vista dall'atomo in movimento. Quando le due frequenze diventano comparabili l'atomo ha un'alta probabilità di cambiare sottostato magnetico e invertire la direzione del dipolo, cioè di compiere uno *spin-flip*. Majorana dimostra che la probabilità di *spin-flip* dipende proprio dal rapporto k tra le due frequenze ed è data da $e^{-k\pi/2}$. Come scrive E. Amaldi, il problema "fu in realtà trattato e risolto da Majorana con estrema eleganza e concisione per il caso $J = 1/2$ ". L'estensione al caso di momento angolare J qualsiasi fu sviluppata da F. Bloch e I. I. Rabi, che nel loro celebre articolo del 1945⁽³⁾ citano ampiamente il lavoro di Majorana individuandolo come il lavoro fondamentale per la soluzione del problema. La trattazione di Majorana dei processi di ribaltamento di spin resta un classico, è utilizzata in testi di meccanica quantistica⁽⁴⁾, è stata recentemente ripresa anche nel contesto della fisica delle collisioni atomiche e molecolari a bassa energia⁽⁵⁾, ha applicazioni anche al di fuori della fisica atomica e molecolare ed è ad esempio utilizzata per manipolare fasci polarizzati in spettroscopia neutronica.

Discutiamo due campi di indagine sperimentale in cui il lavoro di Majorana ha trovato applicazione ed è tuttora di attualità: la spettroscopia di doppia risonanza e la condensazione di Bose-Einstein. Nei primi anni '50 la fisica atomica sviluppa una tecnica di spettroscopia di doppia risonanza (ottica-radiofrequenze) per indagare le strutture atomiche. In particolare, Brossel e Bitter⁽⁶⁾ studiano la polarizzazione della fluorescenza dal livello 3P_1 più basso del mercurio eccitato dallo stato fondamentale con luce polarizzata in modo da popolare solo il sottolivello $m = 0$. Nell'esperimento gli atomi sono immersi in un campo magnetico che separa i sottolivelli Zeeman $m = -1, 0, +1$. Una radiazione a radiofrequenza viene utilizzata per indurre transizioni da $m = 0$ a $m = +1$ o $m = -1$, il che altera la polarizzazione della radiazione di fluorescenza. La forma di riga osservata ha un comportamento atipico, infatti al crescere della potenza a radiofrequenza si osserva uno sdoppiamento con un marcato minimo centrale. Brossel e Bitter interpretano tale comportamento come risultato di "risonanze di Majorana" ed usano proprio la formula di Majorana per riprodurre perfettamente i dati sperimentali. Tale forma di riga è oggi universalmente nota come "curva di Majorana-Brossel". L'analisi del fenomeno è tuttora di grande interesse ed è stata ripresa da C. Cohen-Tannoudji nel suo corso al *Collège de France* del 2003⁽⁷⁾. Egli interpreta la forma di riga con un minimo centrale come

⁽³⁾ F. BLOCH e I. I. RABI, "Atoms in Variable Magnetic Fields", *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945) 237.

⁽⁴⁾ L. D. LANDAU e E. M. LIFSHITZ, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory* (Nauka, Moscow) 1974; (Pergamon Press, Oxford) 1977.

⁽⁵⁾ F. DI GIACOMO e E. E. NIKITIN, "The Majorana formula and the Landau-Zener-Stuckelberg treatment of the avoided crossing problem", *Phys. Usp.* **48** (2005) 515.

⁽⁶⁾ J. BROSSEL e F. BITTER, "A New Double Resonance Method for Investigating Atomic Energy Levels. Application to Hg 3P_1 ", *Phys. Rev.* **86** (1952) 308; vedi anche: J. BROSSEL, Thesis, Faculté des Sciences de l'Université de Paris (1952).

⁽⁷⁾ C. COHEN-TANNOUDJI, lezioni pubblicate in rete all'indirizzo <http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/>.

conseguenza dell'interferenza quantistica con un processo a tre fotoni dove l'atomo dal sottolivello $m = 0$, prima di transire al sottolivello $m = +1$, opera una transizione di andata e ritorno al sottolivello $m = -1$.

Tornando al problema del ribaltamento del momento angolare degli atomi in movimento in un campo magnetico variabile attorno ad un punto di zero, è interessante osservare che la comprensione di questo effetto ha reso possibile la realizzazione sperimentale della condensazione di Bose-Einstein in un gas di atomi. Perché questa avvenga, il campione atomico deve essere raffreddato a temperature dell'ordine dei microkelvin e questo è stato realizzato utilizzando trappole magnetiche per atomi orientati e preraffreddati con radiazione laser. Il raffreddamento finale verso la condensazione avviene per evaporazione forzata dalla trappola magnetica degli atomi più energetici e conseguente termalizzazione dei restanti. A questo proposito sono cruciali i processi collisionali, che richiedono un'alta densità atomica. Agitandosi in una trappola che è realizzata con un gradiente di campo magnetico, gli atomi in moto sono sottoposti ad un campo variabile: più freddi sono, più lentamente si muovono e più lento è il loro spostamento attorno al minimo. Nei primi tentativi sperimentali di raggiungere la condensazione venivano utilizzate delle trappole magnetiche di quadrupolo, realizzate con un gradiente uniforme di campo a partire da uno zero di minimo: esattamente la configurazione esaminata da Majorana nel suo articolo. In tal caso all'attraversamento del minimo lo spin si inverte, gli atomi non vengono più confinati e la formula di Majorana consente un'analisi quantitativa del fenomeno, con k che dipende dal gradiente di campo, dalla distanza dallo zero e dalla velocità degli atomi, cioè dalla loro temperatura. Lo zero di campo costituisce una sorta di "buco" di perdita che abbassa la densità atomica sino a rendere inefficiente il raffreddamento. E. A. Cornell, C. E. Wieman e W. Ketterle, che per primi hanno realizzato sperimentalmente la condensazione di Bose-Einstein nel 1995, erano ben consapevoli della drammaticità del problema tanto che del "Majorana hole" parlano diffusamente e ripetutamente nelle loro relazioni per il premio Nobel⁽⁸⁾⁽⁹⁾. Il problema da risolvere era quello di creare delle trappole con un minimo diverso da zero. Il primo ad aver successo fu il gruppo di Boulder con una trappola piuttosto sofisticata (TOP), dove il minimo veniva fatto ruotare ed i vari parametri erano scelti avendo presente l'espressione quantitativa dello *spin-flip*. È interessante riportare quanto Cornell e Wieman scrivono: "*This zero represents a hole in the trap, a site at which atoms can undergo Majorana transitions and thus escape from the trap. ... the TOP design worked well, and the samples were cooled far colder, in fact too cold ...*". Ketterle ricorse invece alla soluzione di tenere lontani gli atomi dal punto di campo zero focalizzando radiazione laser. Oggigiorno, avendo capito a fondo il fenomeno, è possibile utilizzare varie configurazioni statiche con minimo diverso da zero. Fra le tante si cita quella che F. S. Cataliotti ha in funzione nella Catania di Majorana, dove l'intrappolamento degli atomi avviene su un microcircuito elettronico.

⁽⁸⁾ E. A. CORNELL e C. E. WIEMAN, "Bose-Einstein condensation in a dilute gas", *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 875.

⁽⁹⁾ W. KETTERLE, "When atoms behave as waves", *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 1173.

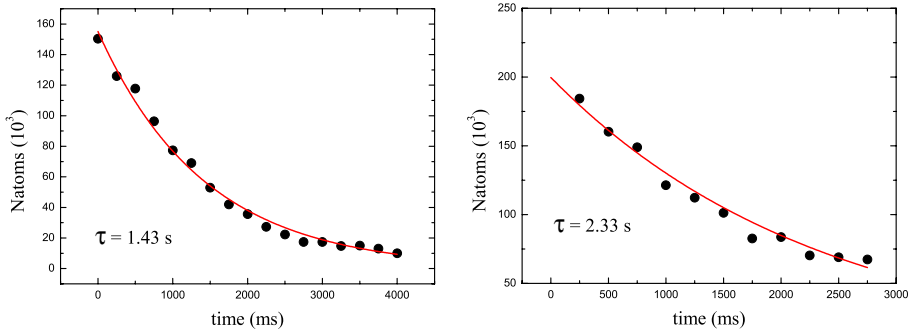


Fig. 1. – Atomi polarizzati e confinati con gradienti magnetici a pochi microkelvin sulla via della condensazione di Bose-Einstein. Il grafico a sinistra si riferisce a una configurazione in cui il campo magnetico ha un minimo uguale a zero, per cui si hanno perdite di atomi a causa dello *spin-flip* di Majorana. Il grafico a destra si riferisce a una trappola appositamente progettata con un minimo diverso da zero per controllare il fenomeno di ribaltamento dello spin⁽¹⁰⁾.

Si riporta in Fig. 1 l'andamento nel tempo del numero di atomi intrappolati a una temperatura di poche decine di microkelvin in presenza di un minimo uguale a zero (a sinistra) ed in una situazione in cui il “buco” viene tappato con l'aggiunta di un ulteriore campo magnetico (a destra): come si osserva, l'eliminazione dello *spin-flip* di Majorana porta ad un aumento significativo del tempo di vita degli atomi intrappolati⁽¹⁰⁾.

Una volta realizzato il condensato, transizioni di *spin-flip*, indotte in maniera controllata, possono rivelarsi utili per ulteriori sviluppi nel campo della fisica atomica a bassissime temperature. Recentemente, X. Chen dell'Università di Pechino⁽¹¹⁾ ha utilizzato le previsioni teoriche di Majorana per sviluppare un nuovo metodo per estrarre atomi coerenti da un condensato e realizzare così un *laser atomico* impulsato.

MASSIMO INGUSCIO
Università di Firenze

⁽¹⁰⁾ Per gentile concessione di F. S. Cataliotti, Università di Catania (2006).

⁽¹¹⁾ X. MA *et al.*, “Population oscillation of the multicomponent spinor BEC induced by nonadiabatic transitions”, *Phys. Rev. A* **73** (2006) 013624.

Oriented atoms in a variable magnetic field^(*)

ETTORE MAJORANA

Summary. — The author calculates the probability of non-adiabatic processes when an oriented atomic beam passes close to a point where the magnetic field vanishes.

As is well known, an oriented atom in a slowly varying magnetic field follows adiabatically the direction, assumed to be variable, of the field. This is the cause of a phenomenon that has recently been observed: if a molecular beam emerging from a STERN-GERLACH experiment is passed through another STERN-GERLACH experiment, one does not observe any further splitting of the beam. The reason is the following: all the atoms have the same orientation since all of them have followed exactly the stray field inevitably existing in the region between the pole-pieces which are meant to produce the orientation of the beam and those which should test this orientation after a certain distance. However, PHIPPS has undertaken some experiments to observe a non-adiabatic variation of the field in this region; this requires that the field be sufficiently weak and the variation of its direction sufficiently fast so that its rotational frequency be comparable with the LARMOR frequency. Since it is difficult to reduce the intensity of the field below a few gauss⁽¹⁾, it is necessary, with a velocity of the beam of the order of 10^5 cm/sec, that the direction of the field changes appreciably over a distance of a fraction of a millimeter. These are, therefore, very delicate experiments that have not yet produced any decisive result.

(*) Translated from "Il Nuovo Cimento", vol. 9, 1932, pp. 43-50, by P. Radicati di Brozolo.

(¹) T. E. PHIPPS and O. STERN "Z. Physik", 73, 185 (1932).

The problem has been discussed theoretically by GÜTTINGER⁽²⁾ in the case of a uniformly rotating field with constant intensity. In this paper we will suppose instead that the molecular beam passes close to a point where the magnetic field vanishes. This case is of special importance because, if the beam were to pass exactly by a point of zero field, all the atoms would invert their orientation.

On the other hand, we cannot obtain a zero field in a point on the trajectory of the molecular beam except by several trials, for example by using two orthogonal auxiliary fields that can be regulated independently; this makes it difficult to perform the experiment until fast means to detect the beam are available. Nevertheless we anticipate the discussion to better clarify the nature of the dynamical problem arising from the rotation of a magnetic atom in an arbitrarily varying magnetic field. Our calculations will show that both the classical and the quantum-mechanical treatment require the integration of the same differential equations. It follows that when the classic solution is known, as in the case of a uniformly rotating field with constant angular velocity—which is the problem treated by GÜTTINGER—, the quantum solution can be immediately derived. For the problem that we will study later, namely the passing close to a point of vanishing field with a slowly varying gradient, the quantum treatment is mathematically more convenient. Also in this case to obtain the general solution it is enough to solve the simplest case $j = 1/2$.

1. A rotational state of an atom with internal quantum $j = 1/2$ can be represented as a linear combination of two orthogonal states $\psi_{1/2}$ and $\psi_{-1/2}$ with projection $\pm 1/2$ in the z -direction:

$$\psi = C_{1/2}\psi_{1/2} + C_{-1/2}\psi_{-1/2}.$$

The state is therefore essentially defined by the ratio $\frac{C_{-1/2}}{C_{1/2}}$.

If the phases of $\psi_{1/2}$ and $\psi_{-1/2}$ (*) are chosen so as to obtain the normal representation of angular momenta, the state ψ can be represented, as is known, in an invariant way by a point P on a unit sphere whose spherical coordinates ϑ and φ are defined by(**)

$$\text{tang} \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} = \frac{C_{-1/2}}{C_{1/2}}.$$

If O is the center of the sphere, the vector radius OP defines the direction along which the momentum in the state ψ has value $1/2$. In the case $j = 1/2$ the most generic rotational state then corresponds to oriented atoms with momentum $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ in an arbitrary

⁽²⁾ P. GÜTTINGER, "Z. Physik", 73, 169 (1932).

(*) In "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed $\psi_{1/2}$. (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

(**) In "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed $\text{tang} \frac{\vartheta}{z}$ here and in the following eq. (3). (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

direction. The probability of agreement for two states represented by the points P and P' is given by

$$W(P, P') = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

where α is the angle POP' . The probability vanishes, *i.e.* the two states are orthogonal, when P and P' are diametrically opposite. For $j > 1/2$ there is in general no direction along which the atom is oriented, *i.e.* with a value determined by angular momentum. In spite of this, an intrinsic geometric representation similar to the previous one is still possible. The only difference is that every state, rather than being represented by a single point, is represented by $2j$ points on the unit sphere. Indeed let us consider a generic state:

$$\psi = C_j \psi_j + C_{j-1} \psi_{j-1} + \dots + C_{-j} \psi_{-j}$$

and let $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2j}$ be the roots of the equation

$$(1) \quad a_0 \zeta^{2j} + a_1 \zeta^{2j-1} + \dots + a_{2j} = 0,$$

where

$$(2) \quad a_r = (-1)^r \frac{C_j - r}{\sqrt{(2j - r)!r!}}.$$

The state ψ can then be represented by the points P_1, P_2, \dots, P_{2j} on the unit sphere where the spherical coordinates ϑ_s, φ_s of P_s are given by

$$(3) \quad \text{tang} \frac{\vartheta_s}{2} e^{i\varphi_s} = \zeta_s.$$

It is not difficult to verify that this geometric representation is independent of the choice of the coordinate system. The distribution of the representative points is *a priori* arbitrary but becomes particularly simple in the case of oriented atoms. To an oriented state with angular momentum component m in the direction OP , there actually correspond $j + m$ points that coincide in P and $j - m$ in the point diametrically opposite to P , as if each of the representative points indicated the direction of a little gyroscope with angular momentum $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. The probability of agreement for two oriented states, one with momentum m in the direction OP , the other with momentum m' in the direction OP' forming with OP an angle α , is given by

$$(4) \quad W(P, P'; m, m') = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{4j} (j + m)! (j - m)! (j + m')! (j - m')! \left[\sum_0^r \frac{(-1)^r \left(\text{tang} \frac{\alpha}{2} \right)^{2r - m + m'}}{r!(r - m + m')!(j + m - r)!(j - m' - r)!} \right]^2$$

which is obviously symmetric in m and m' .

Let us now consider the rotation of the atom in a magnetic field $H(t)$ varying arbitrarily with time; hence let us suppose that the atom has a magnetic moment $-gj\mu_0$ so that for a sufficiently weak field we can assume that the Hamiltonian is $g\mu_0(j, H)$. The equations of motion are therefore:

$$\dot{C}_m = -\frac{2\pi i}{h}g\mu_0 \left[mH_z C_m + \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \frac{H_x - iH_y}{2} C_{m-1} + \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{H_x + iH_y}{2} C_{m+1} \right].$$

Using relation (2) we obtain

$$\dot{a}_r = -\frac{2\pi i}{h}g\mu_0 \left[(j-r)H_z a_r - (r+1) \frac{H_x - iH_y}{2} a_{r+1} - (2j-r+1) \frac{H_x + iH_y}{2} a_{r-1} \right].$$

Setting the time derivative of the left-hand side of (1) equal to zero, we easily find that the time derivative of a generic root ζ_i is:

$$\dot{\zeta}_i = \frac{2\pi i}{h}g\mu_0 \left(H_z \zeta_i + \frac{H_x - iH_y}{2} \zeta_i^2 - \frac{H_x + iH_y}{2} \right).$$

The time derivatives of ϑ_i , φ_i relative to the point P_i of which ζ_i is the stereographic projection on the complex plane $x + iy$ follow from equation (3):

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_i &= \frac{2\pi}{h}g\mu_0 (H_y \cos \varphi_i - H_x \sin \varphi_i), \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{2\pi}{h}g\mu_0 \left(H_z - \frac{H_x \cos \varphi_i + H_y \sin \varphi_i}{\text{tang } \vartheta_i} \right). \end{aligned}$$

These equations mean that each of the representative points on the unit sphere precedes around the field direction with frequency $g \cdot o$, where o is the LARMOR frequency. This is what would happen in classical mechanics if any of the radii OP_i denoted the direction of a gyroscope with self-momentum $j \frac{h}{2\pi}$ and magnetic moment $-gj\mu_0$. It is actually possible to prove that the validity of this result is implicit in the invariance of the geometric representation. The converse is also true.

From what has been said so far, it follows that the relative positions of the $2j$ representative points are invariant in time; as a consequence, if the atom is initially oriented with angular momentum component m in the direction of the field, at time t it will still be oriented with momentum m along a direction forming an angle $\alpha(t)$ with the field. Knowing the rotation angle $\alpha(t)$ that can be calculated both with classical and quantum mechanics, and is independent of j and m , we can calculate with (4) the probability that the angular momentum component in the direction of the field takes at time t the generic value m' .

2. Let us now suppose that a beam of oriented atoms passes close to a point Q where $H_x = H_y = H_z = 0$. Close to Q the field components are linear functions of the Cartesian coordinates x, y, z ; in a coordinate system centred on a moving atom whose motion we can assume with large approximation to be rectilinear and uniform, the components of the field acting on the atom are then linear functions of time. Let the x -axis be in the same direction of the field when it reaches the minimum intensity, which will in general happen not too far from Q and the z -axis in the direction opposite to the time derivative of the magnetic field, which is obviously orthogonal to the previous one. Let us further suppose that the origin of time coincides with the instant when the field is minimum. The components of the field acting on the atom at a given time t will be:

$$H_x = A; \quad H_y = 0; \quad H_z = -Ct.$$

If $j = 1/2$ let us set $\psi = \xi\psi_{1/2} + \eta\psi_{-1/2}^{(*)}$; the equations of motion will then be

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\pi i}{h} g\mu_0 (-Ct\xi + A\eta), \\ \dot{\eta} &= -\frac{\pi i}{h} g\mu_0 (A\xi + Ct\eta). \end{aligned}$$

To work with dimensionless variables let us introduce a new time measure(**):

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2h} g\mu_0 C} \cdot t$$

and the numerical quantity

$$k = \frac{2\pi g\mu_0 A^2}{hC}$$

which gives the ratio of the atom precession frequency to the rotation frequency of the field direction when this ratio reaches its minimum value, *i.e.* for $\tau = 0$. If v is the vapour-beam velocity at distance d from point Q close to which the field gradient is of the order of G gauss per cm, $k(\star)$ will be of the order of $10^7 G \frac{d^2}{v}$. For example for $v = 10^5$ and $G \sim 1$, k will be $\sim 100 d^2$ and therefore $k \sim 1$ for $d = 1$ mm. With the above new variables we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -i(-2\tau\xi + \sqrt{k}\eta), \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -i(\sqrt{k}\xi + 2\tau\eta). \end{aligned}$$

(*) In "Il Nuovo Cimento" $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$ are erroneously printed in line. (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

(**) In "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed $\frac{\pi}{zh}$. (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

(\star) In "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed K , here and also in the first line of p. 132. (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

These equations can be simplified by setting:

$$\xi = e^{i\tau^2} f; \quad \eta = e^{-i\tau^2} g$$

from which it follows:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{df}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{-2i\tau^2}g \\ \frac{dg}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{2i\tau^2}f. \end{cases}$$

Eliminating g , we obtain:

$$(6) \quad \frac{d^2f}{d\tau^2} + hi\tau \frac{df}{d\tau} + kf = 0.$$

We can derive an integral representation of the solutions of this differential equation that allows to determine the asymptotic expression for large positive or negative values of τ . This is indeed what we need since we assume that for $\tau = -\infty$ the atom is oriented with respect to the field and we want to determine its orientation for $\tau \rightarrow \infty$.

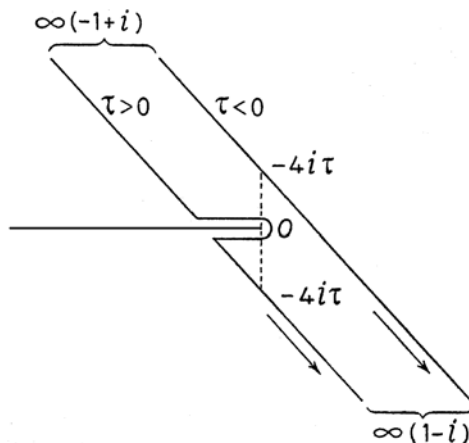
Since everything reduces to the calculation of the angle α defined above, it is enough to consider only one solution of eq. (6). This is given by

$$f(\tau) = \frac{\sqrt{k} e^{-k\pi/8}}{2(1+i)\sqrt{\pi}} \int_C s^{(k/4i)-1} e^{(s^2/8i)+s\tau} ds$$

with logs assuming its principal value, and the boundary condition

$$\left|_C s^{k/4i} e^{(s^2/8i)+s\tau} = 0 \right.$$

being satisfied if the integration path has the form shown in the figure for the two cases $\tau < 0$ e $\tau > 0$.



The negative part of the real axis is a line of discontinuity for the function to be integrated and cannot be crossed. Moreover, to evaluate the asymptotic expressions, the integration paths are drawn through the saddle point $s = -4i\tau$ in the direction of maximum slope.

For $\tau \rightarrow -\infty$ the whole integral comes from the vicinity of the point $s = -4i\tau$. With the substitution

$$s = -4i\tau + (1 - i)p$$

we can easily calculate the first terms in the asymptotic expansion of f and, with the help of the first equation (5), of g . Neglecting the terms that tend to zero we find

$$\tau \rightarrow -\infty; \quad f = 0; \quad g = (-4\tau)^{k/4i}.$$

For $\tau \rightarrow \infty$ the asymptotic expression of the integral comes partly from the neighbourhoods of the saddle point $s = -4i\tau$, and partly from the branching point O . In this case the result is

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty: \quad f &= -\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{k} e^{-k/4i} e^{-k\pi/8} \sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right) \Gamma\left(\frac{k}{4i}\right) \\ g &= (4\tau)^{k/4i} e^{-k\pi/4}. \end{aligned}$$

Since for real $a^{(3)}$

$$|\Gamma(ai)| = \sqrt{\frac{\pi}{a \sinh(\pi a)}},$$

or keeping in mind the constancy of $|f^2| + |g^2|$ we find the following expressions for $|f|$ and $|g|$:

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow -\infty: \quad & |f| = 0; \quad |g| = 1 \\ \tau \rightarrow \infty: \quad & |f| = \sqrt{1 - e^{-k\pi/2}}; \quad |g| = e^{-k\pi/4}. \end{aligned}$$

For $\tau \rightarrow -\infty$ the field is directed along the z -axis and therefore at the beginning of the phenomenon the momentum of the atom is $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ in the direction of the field. For $\tau \rightarrow \infty$ the field is instead directed along $-z$, hence the limiting value of $|g^2|$ provides the probability that the atom reverses its orientation, *i.e.* that, once it has passed in the vicinity of Q it acquires a momentum $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ in the direction of the field. This probability is therefore

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-k\pi/2}.$$

⁽³⁾ See, *e.g.*, WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis*, IV ed., p. 259.

In this way, 21% of the atoms turn over for $k = 1$ and 4.3% for $k = 2$.

The general solution of the problem for an arbitrary j and for transitions from m to m' can be obtained from eq. (4) with the appropriate value of the rotation angle α . Since in our case

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

by comparison with the previous expression, we obtain

$$\alpha = 2 \arcsin e^{-k\pi/4}.$$

Comment on the Scientific Paper no. 6: "Oriented atoms in a variable magnetic field".

In this work Majorana evaluates the probability of spin-flip for atoms in a polarized beam in the presence of a varying magnetic field. It is a quantitative study of the non-adiabatic situation. The problem, "particularly important" to Majorana, is what happens close to a zero of the magnetic field: "all the atoms would invert their spin orientation". The problem had been proposed to Majorana by E. Segré, as E. Amaldi recalls⁽¹⁾. Indeed E. Segré, together with R. Frisch⁽²⁾, were setting up an experiment to generalize the famous Stern and Gerlach work on spatial quantization. The latter observations had been done in static magnetic gradient and adiabatic conditions. The goal of the new experiment was to measure the final state of an atomic magnetic moment initially prepared in a definite state in the presence of a rapidly varying field. In Segré and Frisch apparatus the non-adiabatic transition was induced by having the atomic beam close to a zero of the magnetic field. Their measurements were explained using Majorana's quantitative predictions. In his paper Majorana shows how to interpret the total effect of a varying magnetic field on an object with a given angular momentum and a component m along the z -axis in terms of a sudden rotation of the angular momentum itself. By a rigorous solution of the time-dependent Schrödinger equation, Majorana obtains the rotation angle showing that there is a dependence on the gyromagnetic factor but not on the initial m value. As a consequence, after the rotation the system is not in a well-defined quantum state with respect to the original field direction but has to be described as wavepacket composed by a superposition of states with different m' . In the paper the probability amplitude for a transition between m and m' is explicitly calculated.

Majorana immediately singles out two characteristic frequencies of the problem: Larmor precession frequency of the atomic dipole moment and the frequency of rotation of the magnetic field as seen by the atom. When the two frequencies become comparable the atom has a high probability of changing its magnetic substate, *i.e.* to undergo a spin-flip. Majorana demonstrates that the spin-flip probability depends on the ratio k

⁽¹⁾ E. AMALDI, *op. cit.* and the English translation *Ettore Majorana, man and scientist in Strong and Weak Interactions, Present Problems, International School of Physics Ettore Majorana, Erice, June 19th - July 4th 1966*, edited by Zichichi A. (Academic Press, New York and London) 1966.

⁽²⁾ R. FRISCH and E. SEGRÉ, "Ricerche sulla quantizzazione spaziale", *Nuovo Cimento* **10** (1933) 78; "Über die Einstellung der Richtungsquantelung", *Z. Phys.*, **80** (1933) 610.

between the two frequencies and is given by $e^{-k\pi/2}$. As E. Amaldi points out “the problem was really solved by Majorana with extreme elegance and conciseness for the case $J = 1/2$ ”. The generalization to the case of any J was done by F. Bloch e I. I. Rabi who, in their celebrated work of 1945⁽³⁾, cite the work of Majorana as seminal for the solution of the problem. Majorana’s treatment for spin-flips is used in quantum mechanics textbooks⁽⁴⁾ and has recently been rediscovered in atomic and molecular collision physics at low energy⁽⁵⁾; it is also widely applied outside atomic and molecular physics, *e.g.* to manipulate polarized beams in neutron physics.

Let us discuss here two experimental fields where Majorana’s work has found an application and is still quite useful: namely double-resonance spectroscopy and Bose-Einstein condensation. In the early 1950s in atomic physics double-resonance spectroscopy (optics+radiofrequency) has been developed to investigate atomic structures. In particular, Brossel and Bitter⁽⁶⁾ have studied the polarization state of fluorescence from the lowest 3P_1 level of mercury excited with polarized light in order to populate only the sublevel $m = 0$. In the experiment the atoms are subjected to a magnetic field to separate Zeeman sublevels $m = -1, 0, +1$. A radiofrequency radiation is used to induce transition between $m = 0$ and $m = +1$ or $m = -1$. As a consequence, the polarization state of the fluorescence radiation is altered. The observed lineshape has a peculiar behaviour, indeed by increasing the radiofrequency power one observes a doubling of line with an evident central minimum. Brossel and Bitter interpret such behaviour as “Majorana transitions” and use Majorana’s formula to perfectly explain the experimental data. Nowadays such lineshape is known as “Majorana-Brossel”. The explanation of the experiment is still of great interest and has been treated by C. Cohen-Tannoudji in his course at *Collège de France* in 2003⁽⁷⁾. He interprets the lineshape as a consequence of the quantum interference with a three-photon process where the atoms from sublevel $m = 0$, before making a transition to sublevel $m = +1$, undergo a transition to and from sublevel $m = -1$.

Coming back to the problem of the spin-flip of atoms moving in a magnetic quadrupole field, it is interesting to note that the understanding of this effect has made the experimental realization of Bose-Einstein condensation in an atomic gas possible. In order to observe condensation, atoms must be cooled to the microkelvin regime and this has been achieved by using magnetic traps for atoms oriented and pre-cooled with laser radiation.

⁽³⁾ F. BLOCH and I. I. RABI, “Atoms in Variable Magnetic Fields”, *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945) 237.

⁽⁴⁾ L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory* (Nauka, Moscow) 1974; (Pergamon Press, Oxford) 1977.

⁽⁵⁾ F. DI GIACOMO and E. E. NIKITIN, “The Majorana formula and the Landau-Zener-Stueckelberg treatment of the avoided crossing problem”, *Phys. Usp.* **48** (2005) 515.

⁽⁶⁾ J. BROSSEL and F. BITTER, “A New Double Resonance Method for Investigating Atomic Energy Levels. Application to Hg 3P_1 ”, *Phys. Rev.* **86** (1952) 308; see also: J. BROSSEL, Thesis, Faculté des Sciences de l’Université de Paris (1952).

⁽⁷⁾ C. COHEN-TANNOUDJI, lessons available online at <http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/>

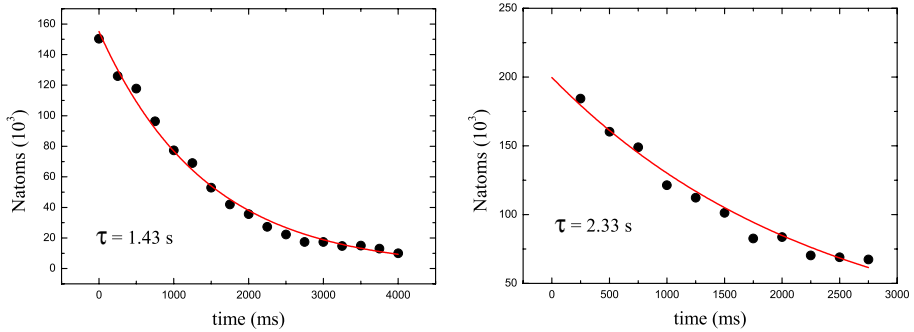


Fig. 1. – Atoms polarized and confined with magnetic field gradients on the route to Bose-Einstein condensation. The graph on the left refers to a quadrupole trap where there are losses due to Majorana spin-flip. The graph on the right refers to a trap specifically designed to avoid spin-flips⁽¹⁰⁾.

The final cooling towards condensation is performed by forced evaporation of the hottest atoms from the magnetic trap and by the consequent thermalization of the remaining atoms. To this aim collision processes are fundamental requiring a large atomic density. By moving in a magnetic trap the atoms are exposed to a varying magnetic field; the coldest they are the slowest they move around the magnetic-field minimum. In the first attempts quadrupole magnetic traps were used; *i.e.* the configuration Majorana has studied in his paper. When the atoms undergo a spin-flip they are no longer confined and Majorana’s formula allows a quantitative analysis in terms of the magnetic field gradient and of the atomic temperature. The zero in the magnetic field is a sort of “hole” that reduces the atomic density thus preventing the evaporative cooling. E. A. Cornell, C. E. Wieman and W. Ketterle, who have first realized Bose-Einstein condensation in 1995, were perfectly aware of the problem. Indeed in their Nobel Lectures⁽⁸⁾⁽⁹⁾ they often mention the “Majorana hole”. The problem to be solved was to create traps with a non-zero minimum. The first solution came from the Boulder group using a quite sophisticated trap where the minimum was rotated (TOP) and the parameters were chosen using the quantitative expression for the spin-flip. It is interesting to report what Cornell and Wieman write: “This zero represents a hole in the trap, a site at which atoms can undergo Majorana transitions and thus escape from the trap. . . the TOP design worked well, and the samples were cooled far colder, in fact too cold . . .”. Ketterle, on the other hand, solved the problem by using a focused laser beam to “plug the hole”. Nowadays, having completely understood the problem, it is possible to use different static configurations with a non-zero minimum. Among the others we here cite the one used in the very town —Catania— of Majorana by F. S. Cataliotti where the atoms are trapped on a micro-electronic circuit. Figure 1 shows the temporal behaviour of the atomic number trapped

⁽⁸⁾ E. A. CORNELL and C. E. WIEMAN, “Bose-Einstein condensation in a dilute gas”, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 875.

⁽⁹⁾ W. KETTERLE, “When atoms behave as waves”, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 1173.

at a temperature of a few microkelvin in the presence of a zero (left) and of a situation where the “hole” is plugged by adding a magnetic field (right): as can be observed by removing Majorana spin-flip the atomic-trap lifetime is significantly enhanced⁽¹⁰⁾.

Once the condensate is realized, spin-flip transitions, this time induced in a controlled fashion, can be used for further developments in atomic physics at ultra-low temperatures. Recently, X. Chen in Beijing University⁽¹¹⁾ has used Majorana’s theoretical predictions to develop a new method to extract coherent atoms from a condensate and realize a pulsed *atom laser*.

MASSIMO INGUSCIO
Università di Firenze

⁽¹⁰⁾ Courtesy of F. S. Cataliotti, Università di Catania (2006).

⁽¹¹⁾ X. MA *et al.*, “Population oscillation of the multicomponent spinor BEC induced by nonadiabatic transitions”, *Phys. Rev. A* **73** (2006) 013624.

Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Il Nuovo Cimento”, vol. 9, 1932, pp. 335-344.

Sunto. — L'autore stabilisce equazioni d'onda lineari nell'energia e relativisticamente invarianti per particelle aventi momento angolare intrinseco comunque prefissato.

La teoria di DIRAC dell'elettrone fa uso, come è noto, di una funzione d'onda a quattro componenti delle quali, quando si considerino movimenti lenti, due hanno valori trascurabili mentre le altre due obbediscono in prima approssimazione all'equazione di SCHRÖDINGER.

In modo analogo una particella con momento angolare intrinseco $s \frac{\hbar}{2\pi}$ ($s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) è descritta nella meccanica quantistica mediante un complesso di $2s + 1$ funzioni d'onda che soddisfano separatamente alla equazione di SCHRÖDINGER. Tale rappresentazione è naturalmente valida finché si trascurano gli effetti relativistici, e ciò è lecito per particelle mobili con velocità piccola di fronte a quella della luce. Un altro caso in cui la teoria elementare è ancora utilizzabile è ovviamente quello in cui la velocità della particella pur essendo comparabile con c rimane quasi costante in direzione e grandezza, poiché allora è possibile ricondursi allo studio di movimenti lenti scegliendo opportunamente il sistema di riferimento.

Il caso invece in cui la velocità delle particelle pur essendo quasi costante entro regioni sufficientemente estese del continuo spazio-tempo varia da una regione all'altra

lentamente ma fra valori estremi lontani, sotto l'azione di campi esterni deboli, non si lascia trattare immediatamente con l'equazione non relativistica di SCHRÖDINGER.

Una generalizzazione relativistica della teoria precedente deve soddisfare successivamente alle condizioni seguenti al crescere del suo grado di accuratezza:

- (a) La teoria permette lo studio di particelle aventi velocità quasi determinata in grandezza e direzione, dando risultati equivalenti alla teoria non relativistica, senza tuttavia la necessità di scegliere un sistema particolare di riferimento.
- (b) La teoria permette inoltre di studiare processi in cui la velocità delle particelle varia lentamente, ma entro limiti comunque estesi, per l'azione di campi esterni deboli.
- (c) La teoria è valida in generale comunque indeterminata sia la velocità delle particelle.

È probabile che una teoria rigorosa soddisfacente alla condizione (c) sia incompatibile col mantenimento dell'attuale schema quantistico. La teoria di DIRAC dell'elettrone che pure ha dimostrato la sua fecondità nello studio di fenomeni schiettamente relativistici come la diffusione di raggi γ duri, soddisfa certo imperfettamente alla (c), come prova la nota difficoltà delle transizioni a stati di energia negativa. Al contrario è verosimile che una teoria soddisfacente a (b) e solo parzialmente a (c) non urti in difficoltà sostanziali, il suo contenuto fisico potendo essere essenzialmente quello stesso che giustifica l'equazione di SCHRÖDINGER. L'esempio più notevole di tali generalizzazioni relativistiche ci è dato appunto dalla teoria di DIRAC, ma poiché questa è applicabile soltanto a particelle con momento intrinseco $s = 1/2$, ho cercato equazioni analoghe nella forma a quelle di DIRAC, sebbene alquanto più complicate, le quali permettono la considerazione di particelle con momento angolare arbitrario, e in particolare nullo.

L'equazione d'onda, in assenza di campo, di una particella materiale, deve avere secondo DIRAC la forma:

$$(1) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0.$$

Equazioni di questo tipo presentano una difficoltà di principio. L'operatore $\beta^{(*)}$ deve infatti trasformarsi come la componente temporale di un quadrivettore e così β non può essere semplicemente multiplo della matrice unità ma deve avere almeno due autovalori differenti, supponiamo β_1 e β_2 ; ma da ciò segue che l'energia di riposo della particella, che si ottiene da (1) ponendo $p = 0$ deve avere almeno due valori differenti, cioè $\beta_1 mc^2$ e $\beta_2 mc^2$. Secondo le equazioni di DIRAC i valori possibili della massa di riposo sono, come è noto, $+m$ e $-m$ dal che segue per l'invarianza relativistica che l'energia può avere due valori differenti per il segno per ogni valore di p : $W = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$.

L'indeterminazione nel segno dell'energia può essere in realtà superata, usando equazioni del tipo fondamentale (1), solo se la funzione d'onda ha infinite componenti che *non* si lasciano spezzare in tensori o spinori finiti.

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è stampato erroneamente $^{-1}$ al posto di β . (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

1. L'equazione (1) può essere dedotta dal principio variazionale

$$(2) \quad \delta \int \tilde{\psi} \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi dV dt = 0.$$

Una delle condizioni dell'invarianza relativistica è ovviamente che sia invariante la forma $\tilde{\psi}\beta\psi$.

Se ora vogliamo che l'energia di riposo risulti sempre positiva, gli autovalori di β devono essere tutti positivi e la forma $\tilde{\psi}\beta\psi$ sarà definita positiva. È allora possibile mediante una trasformazione *non* unitaria $\psi \rightarrow \varphi$ ridurre detta forma alla forma unità:

$$(3) \quad \tilde{\psi}\beta\psi = \tilde{\varphi}\varphi.$$

Sostituendo in (2) a ψ la sua espressione mediante φ si avrà

$$(4) \quad \delta \int \tilde{\varphi} \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi dV dt = 0,$$

da cui seguono le equazioni equivalenti alla (1):

$$(5) \quad \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi = 0.$$

Dobbiamo ora determinare la legge di trasformazione di φ di fronte a una rotazione di LORENTZ e l'espressione delle matrici $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ in modo che sia rispettata l'invarianza relativistica del principio variazionale (4) e quindi che sia ivi invariante la funzione integranda.

Cominciamo con lo stabilire la legge di trasformazione di φ osservando anzitutto che l'invarianza di $\tilde{\varphi}\varphi$ significa che dobbiamo considerare solo trasformazioni unitarie. Per evitare complicazioni esagerate diamo inoltre la legge di trasformazione solo per trasformazioni di LORENTZ infinitamente piccole, una trasformazione finita potendo ottenersi per integrazione di quelle. Introduciamo le trasformazioni infinitesime nelle variabili ct, x, y, z ;

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ T_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

e poniamo

$$(7) \quad \begin{cases} a_x = iS_x; & a_y = iS_y; & a_z = iS_z \\ b_x = -iT_x; & b_y = -iT_y; & b_z = -iT_z. \end{cases}$$

Gli operatori a e b devono essere Hermitiani in una rappresentazione unitaria, e viceversa; inoltre perché le trasformazioni infinitesime siano integrabili devono soddisfare a certe relazioni di scambio che si deducono da (6) e (7):

$$(8) \quad \begin{cases} (a_x, a_y) = ia_z \\ (a_x, b_x) = 0 \\ (a_x, b_y) = ib_z \\ (a_x, b_z) = -ib_y \\ (b_x, b_y) = -ia_z \end{cases}$$

e le altre che si ottengono per permutazione circolare di x, y, z .

La più semplice soluzione delle (8) mediante operatori Hermitiani è data dalle seguenti matrici infinite in cui gli elementi diagonali sono numerati con due indici j e m e bisogna distinguere due possibilità, secondo che si faccia $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$; $m = j, j-1, \dots, -j$, oppure $j = 0, 1, 2, \dots$; $m = j, j-1, \dots, -j$:

$$(9) \quad \begin{cases} (j, m | a_x - ia_y | j, m+1) = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \\ (j, m | a_x + ia_y | j, m-1) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \\ (j, m | a_z | j, m) = m \\ (j, m | b_x - ib_y | j+1, m+1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} \\ (j, m | b_x - ib_y | j-1, m+1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j+1, m-1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j-1, m-1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j+m-1)} \\ (j, m | b_z | j+1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)} \\ (j, m | b_z | j-1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j-m)}. \end{cases}$$

Se assumiamo che per riflessione nell'origine le $\varphi_{j,m}^{(*)}$ restano inalterate o cambiano segno alternativamente al variare di j , b risulta un vettore polare, mentre a è un vettore assiale.

Chiameremo le grandezze su cui operano a e b tensori o spinori infiniti di indice zero secondo che j è intero o mezzo. La denominazione "di indice zero" significa che è nullo l'invariante:

$$(10) \quad Z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Spinori o tensori infiniti più generali possono definirsi per qualunque valore di Z . Gli spinori possono essere ottenuti semplicemente nel modo seguente. Si consideri una soluzione generica $\psi(q, t)$ delle equazioni di DIRAC senza campo e la si assoggetti a una trasformazione relativistica:

$$(11) \quad \psi(q, t) \rightarrow \psi'(q, t).$$

Allora la trasformazione nello spazio:

$$(12) \quad \psi(q, 0) \rightarrow \psi'(q, 0)$$

è unitaria, e se invece di funzioni arbitrarie $\psi(q, 0)$ consideriamo solo quelle che appartengono a un determinato autovalore z_0 dell'operatore (10), che ha uno spettro continuo che si estende da $-\infty$ a $+\infty$, noi troviamo funzioni che si trasformano mediante (12) come spinori infiniti, ognuno di questi ottenendosi esattamente due volte.

Gli operatori a_x e b_x hanno nella rappresentazione (12) la forma:

$$a_x = \frac{2\pi}{h} (yp_z - zp_y) + \frac{1}{2} \sigma_x$$

$$b_x = \frac{2\pi}{h} x \frac{H}{c} + \frac{i}{2} \alpha_x$$

e analogamente a_y, a_z, b_y, b_z .

2. Dobbiamo ora determinare gli operatori $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ in modo che (4) sia invariante. Poiché consideriamo solo trasformazioni unitarie, detti operatori si trasformano come le forme Hermitiane ad essi collegate ed è quindi necessario per l'invarianza della funzione integranda in (4) che essi costituiscano un vettore covariante ($\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z \sim ct, -x, -y, -z$).

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è stampato erroneamente $\varphi_{j,m}$. (Nota del Curatore, si veda anche E. AMALDI, *op. cit.*)

È ovvia l'interpretazione di $\tilde{\varphi}\gamma_0\varphi$ e $-\tilde{\varphi}\gamma\varphi$ come densità di carica e di corrente. Gli operatori γ devono soddisfare alle relazioni di scambio:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_0, a_x) = 0 \\ (\gamma_0, b_x) = i\gamma_x \\ (\gamma_x, a_x) = 0 \\ (\gamma_x, a_y) = i\gamma_z \\ (\gamma_x, a_z) = -i\gamma_y \\ (\gamma_x, b_x) = i\gamma_0 \\ (\gamma_x, b_y) = 0 \\ (\gamma_x, b_z) = 0 \end{array} \right.$$

e alle altre che si ottengono per permutazione circolare di x, y, z . Le relazioni di scambio (13) determinano, come è facile dimostrare, $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ a meno di un fattore costante. Si trova

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = j + \frac{1}{2} \\ (j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j + 1, m + 1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j + m + 2)} \\ (j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j - 1, m + 1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j - m)(j - m - 1)} \\ (j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j + 1, m - 1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j - m + 1)(j - m + 2)} \\ (j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j - 1, m - 1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j + m)(j + m - 1)} \\ (j, m | \gamma_z | j + 1, m) = \frac{i}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j - m + 1)} \\ (j, m | \gamma_z | j - 1, m) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j + m)(j - m)}. \end{array} \right.$$

Le componenti non indicate di $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ essendo nulle. Si noti che la forma Hermitiana $\varphi\gamma_0\varphi$ è definita positiva come richiede l'interpretazione fisica.

Vogliamo ora passare dalle equazioni scritte nella forma (5) alle equazioni (1). Basta per ciò porre

$$(15) \quad \varphi_{j,m} = \frac{\psi_{j,m}}{\sqrt{j + \frac{1}{2}}}$$

poiché allora la forma collegata a γ_0 si riduce alla forma unità. Otteniamo così equazioni della forma desiderata

$$(16) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0$$

in cui $\beta = \frac{1}{j+\frac{1}{2}}$ mentre le componenti diverse da zero di $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ sono date da

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j+1, m+1) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j+m+1)(j+m+2)}{(j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})}} \\ (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j-1, m+1) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j-m)(j-m-1)}{(j-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j+1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j-m+1)(j-m+2)}{(j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j-1, m-1) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j+m)(j+m-1)}{(j-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}} \\ (j, m | \alpha_z | j+1, m) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j+m+1)(j-m+1)}{(j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})}} \\ (j, m | \alpha_z | j-1, m) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j+m)(j-m)}{(j-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}} \end{array} \right.$$

Quando si cercano le soluzioni di (16) corrispondenti a onde piane con massa positiva si trovano tutte quelle che derivano per trasformazione relativistica delle onde di momento nullo. Per queste l'energia è data da

$$(18) \quad W_0 = \frac{mc^2}{j + \frac{1}{2}}.$$

Abbiamo così per valori mezzi di j stati corrispondenti a valori della massa: $m, m/2, m/3, \dots$, e per j intero: $2m, 2m/3, 2m/5, \dots$.

È da notare che particelle con massa differente hanno momento angolare intrinseco differente, il momento angolare intrinseco avendo un valore determinato solo nel sistema in cui le particelle sono in riposo.

Se si considera il complesso degli stati appartenenti al valore $\frac{m}{s+\frac{1}{2}}$ della massa di riposo come realizzato in natura, tutti gli altri stati non avendo significato, otteniamo una teoria invariante di particelle con momento angolare s che in assenza di campo può riguardarsi come soddisfacente. Si verifica senza difficoltà che per movimenti lenti e particelle di momento intrinseco s solo le $\psi_{s,m}$ sono sensibilmente diverse da zero e obbediscono all'equazione di SCHRÖDINGER con il valore $M = \frac{m}{s+\frac{1}{2}}$ della massa, mentre le $\psi_{s+1,m}$ e $\psi_{s-1,m}$ sono dell'ordine di v/c , le $\psi_{s+2,m}$ e $\psi_{s-2,m}$ dell'ordine di v^2/c^2 , e così via.

Otteniamo così solo due delle equazioni d'onda di cui l'una è adatta per la descrizione di particelle con momento angolare non intero e l'altra per particelle senza momento angolare o con momento intero.

Oltre agli stati appartenenti a valori positivi della massa, ve ne sono altri in cui l'energia è legata al momento da una relazione del tipo

$$(19) \quad W = \pm \sqrt{c^2 p^2 - k^2 c^4}$$

e ne esistono per tutti i valori positivi di k ma solo per $p \geq kc$.

Questi stati possono riguardarsi come appartenenti al valore immaginario ik della massa.

Le funzioni di *spin* appartenenti a onde piane con $p \neq 0$ hanno una espressione particolarmente semplice nel caso di particelle senza momento intrinseco se $p_x = p_y = 0$, $p_z = p$.

Per queste si trova a meno di un fattore di normalizzazione

$$(20) \quad \begin{cases} \psi_{j,0} = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)} \left(i \frac{\eta - j}{\varepsilon}\right)^j \\ \psi_{j,m} = 0 \quad \text{per } m \neq 0 \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

essendo

$$(21) \quad \varepsilon = \frac{p}{Mc}, \quad \eta = \frac{\sqrt{M^2 c^2 + p^2}}{Mc}$$

e $M = 2m$ la massa di riposo.

3. Vogliamo ora considerare brevemente l'introduzione del campo elettromagnetico nell'equazione (16).

Il passaggio dalle equazioni senza campo alle equazioni con campo esterno avviene nel modo più semplice sostituendo a W e p , $W - e\varphi$ e $p - \frac{e}{c}A$, se e è la carica della particella e φ e A i potenziali scalare e vettore. Ma altre possibilità sono aperte. Possiamo ad esempio aggiungere dei termini invarianti, analoghi a quelli introdotti da PAULI⁽³⁾ nella teoria del neutrone magnetico, che portano a fattore le forze del campo in luogo dei potenziali elettromagnetici così da non turbare l'invarianza delle equazioni di fronte all'indeterminazione dei potenziali.

Tale artificio permette di attribuire a particelle con momento angolare non nullo un momento magnetico comunque prefissato. Nel caso dell'elettrone per esempio si trova mediante la semplice sostituzione W , $p \rightarrow W - e\varphi$, $p - \frac{e}{c}A$ un momento magnetico $+\frac{1}{2}\mu_0$ in luogo di $-\mu_0$.

(3) Citato da OPPENHEIMER, "Phys. Rev.", 41, 763 (1932).

Se si vuole specializzare la nostra teoria in una teoria dell'elettrone che si accordi fin dove è possibile con i dati sperimentali dobbiamo quindi modificare il momento magnetico con termini aggiunti. Ma la teoria dell'elettrone così ottenuta è un doppione inutile della teoria di DIRAC che resta assolutamente da preferire in grazia della sua semplicità e del largo suffragio della esperienza. Il vantaggio della presente teoria è per contro la sua applicabilità a particelle con momento angolare differente da 1/2.

Le equazioni con il campo e termini aggiunti per modificare il momento magnetico intrinseco hanno la forma

$$(22) \quad \left[\left(\frac{W}{c} - \frac{e}{c} \varphi \right) + \left(a_x p - \frac{e}{c} A \right) - \beta mc + \lambda(a', H) + \lambda(b', E) \right] \psi = 0$$

in cui a' sta per (a'_x, a'_y, a'_z) e b' per (b'_x, b'_y, b'_z) mentre E e H rappresentano il campo elettrico e magnetico.

La matrice a'_x si deduce da a_x (9) mediante la regola

$$(23) \quad (j, m | a'_x | j', m') = \frac{1}{\sqrt{(j + \frac{1}{2})(j' + \frac{1}{2})}} (j, m | a_x | j', m')$$

e analogamente a'_y, a'_z, b'_y, b'_z .

Per particelle con momento angolare intrinseco $s = 1/2$ si deve porre $\lambda = \frac{2}{c} \mu$ se μ è il momento magnetico che si vuole aggiungere a quello che sorge naturalmente dall'introduzione dei potenziali elettromagnetici nell'equazione d'onda. Quest'ultimo vale in tal caso, come si è detto, $-\frac{1}{2} \frac{eh}{4\pi mc}$. Per particelle senza momento angolare intrinseco è naturale porre $\lambda = 0$.

Per quanto riguarda la soluzione pratica dell'equazione d'onda ricordiamo che per movimenti lenti sono finite e obbediscono all'equazione di SCHRÖDINGER solo le $\psi_{j,m}$ per il valore di j che misura il momento angolare intrinseco in unità $h/2\pi$.

Per particelle senza momento, ad esempio si ha una sola componente grande e cioè $\psi_{0,0}$, mentre le $\psi_{1,m}$ sono dell'ordine di v/c , se v la è velocità della particella, le $\psi_{2,m}$ dell'ordine di v^2/c^2 e così via. Si riesce così a eliminare per successive approssimazioni le componenti piccole e in particolare si giunge a espressioni molto semplici per il calcolo della prima correzione relativistica.

* * *

Ringrazio particolarmente il prof. E. FERMI per la discussione della presente teoria.

Commento alla Nota Scientifica n. 7: "Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario".

Il problema principale che affligge la costruzione di una estensione relativistica della equazione di Schrödinger nel quadro della meccanica ondulatoria è l'esistenza di soluzioni ad energia negativa. Anche assumendo che solo le soluzioni ad energia positiva siano fisicamente significative è difficile escludere transizioni verso stati ad energia negativa. Dirac tentò di risolvere il problema con una equazione alle derivate prime,

$$(1) \quad i \frac{d\psi}{dt} = \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi, \quad \text{ovvero:} \quad \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \psi = 0.$$

Se seguendo Dirac assumiamo le regole di anticommutazione $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, l'equazione descrive una particella di massa m , ma ammette soluzioni con energia sia positiva che negativa. Dirac propose di risolvere il problema assumendo che tutti gli stati di energia negativa siano occupati, di modo che grazie al principio di Pauli una particella di energia positiva non possa saltare in uno stato di energia negativa. In questa versione la teoria va ben oltre i limiti della meccanica ondulatoria, ed è essenzialmente equivalente alla moderna formulazione di teoria dei campi, ammirevolmente presentata nella "Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone" di Majorana.

In questo lavoro su particelle di spin arbitrario Majorana tentò di costruire una generalizzazione relativistica della meccanica ondulatoria che eliminasse completamente le soluzioni ad energia negativa. Nel lavoro mostrò che una condizione *necessaria* per l'assenza di stati a energia negativa è che l'operatore β abbia solo autovalori positivi, e da questo segue che $\varphi = \beta^{1/2}\psi$ si trasforma secondo una rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz. Majorana mostra una assoluta padronanza della teoria dei gruppi. E. Amaldi⁽¹⁾ racconta l'ammirazione di Majorana per i lavori di H. Weyl e di E. Wigner sull'applicazione della teoria dei gruppi alla meccanica quantistica. In questo lavoro troviamo tracce della discussione di Weyl dell'algebra di Lie del gruppo delle rotazioni, qui estesa al gruppo di Lorentz, ad esempio quando presenta le regole di commutazione dei generatori del gruppo come "condizioni di integrabilità". Partendo dalle regole di commutazione, Majorana costruisce le "più semplici" rappresentazioni unitarie ad infinite dimensioni del gruppo di Lorentz, una per momenti angolari interi, l'altra per momenti

⁽¹⁾ E. AMALDI, *op. cit.*

angolari semi-interi, e costruisce esplicitamente le corrispondenti rappresentazioni delle matrici $\vec{\alpha}$ e β .

La versione di Majorana dell'equazione (1) ha soluzioni che descrivono una sequenza di stati di spin j crescente (intero o semi-intero nei due casi), con massa

$$(2) \quad M_j = \frac{m}{j + \frac{1}{2}}.$$

Evitare gli stati di energia negativa ha un costo elevato, l'esistenza di una sequenza infinita di stati di spin crescente e massa decrescente. Non potendo accettare questa conclusione Majorana lascia aperta la possibilità che la sua teoria possa essere usata per descrivere particelle di spin arbitrario j_0 dichiarando non fisiche le soluzioni con $j \neq j_0$, e discute in qualche dettaglio il caso di particelle di spin nullo. Si rende tuttavia conto che in presenza di interazioni sarebbe difficile garantire l'assenza di transizioni a stati di spin differente. In un contesto differente questo è esattamente il problema che affliggeva la interpretazione ondulatoria dell'equazione di Dirac. Il problema è qui ancora più serio per la presenza, cui il lavoro accenna solo brevemente, di soluzioni che oggi diremmo "tachioniche" che corrispondono a valori immaginari della massa, ik , con energia $E = \pm \sqrt{c^2 \vec{p}^2 - k^2 c^4}$, che esistono per $|\vec{p}| > k$ e qualunque k .

Il lavoro, scritto all'inizio dell'estate del 1932, appena prima l'annuncio della scoperta dell'elettrone positivo che segnò il trionfo della teoria di Dirac, non ebbe alcun successo malgrado i risultati brillanti e originali sulle rappresentazioni unitarie del gruppo di Lorentz, riscoperti solo dopo alcuni anni da Wigner. Per una discussione dei successivi sviluppi in questo campo si veda la rassegna di questo lavoro da parte di D. M. Fradkin⁽²⁾.

Se questo lavoro non fosse stato totalmente dimenticato esso si potrebbe considerare un precursore di alcuni degli sviluppi della teoria delle particelle attivamente perseguiti negli ultimi decenni. Negli anni sessanta lo studio dei poli di Regge e la scoperta di stati adronici di spin elevato riaccese brevemente l'interesse per teorie basate su campi che trasformano secondo rappresentazioni infinito-dimensionali del gruppo di Lorentz, che descrivono una sequenza di particelle di spin e massa crescente. Questi tentativi trovarono la loro espressione più alta nei modelli duali, che però, come era stato per la teoria di Majorana, soffrivano della presenza di stati tachionici che si potevano solo evitare in uno spazio-tempo con un numero elevato di dimensioni. Per queste difficoltà, ma anche per l'affermazione della Cromodinamica Quantistica, l'applicazione di queste idee alla fisica degli adroni fu abbandonata, ma idee simili riapparvero più tardi nelle moderne teorie di stringa.

NICOLA CABIBBO
Università di Roma "La Sapienza"

(2) D. M. FRADKIN, *Am. J. Phys.* **34** (1966) 314.

Relativistic theory of particles with arbitrary intrinsic angular momentum^(*)

ETTORE MAJORANA

Summary. — The author establishes wave equations for particles having arbitrary given intrinsic angular momentum. Such equations are linear in the energy and relativistically invariant.

As is well known, DIRAC's theory of the electron makes use of a four-component wave function. When slow movements are considered, two of the components acquire negligible values, while the remaining two, at least in a first approximation, satisfy the SCHRÖDINGER equation.

In a similar fashion, a particle having intrinsic angular momentum $s\frac{h}{2\pi}$ ($s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) is described in quantum mechanics by a set of $2s + 1$ wave functions which separately satisfy the SCHRÖDINGER equation. Of course, such a representation is valid as long as the relativistic effects are neglected, and this is allowed for a particle moving with speed much smaller than the speed of light. A different case in which the elementary theory retains its validity is, of course, the one in which the velocity of the particle is comparable with c but remains approximately constant in direction and magnitude. In fact, this case can be reduced to the study of slow movements by means of a suitable choice of the frame of reference.

(*) Translated from "Il Nuovo Cimento", vol. 9, 1932, pp. 335-344, by C. A. Orzalesi in Technical Report no. 792, 1968, University of Maryland. (Courtesy of E. Recami.)

On the other hand, the following situation cannot be easily dealt with by means of the nonrelativistic SCHRÖDINGER equation: a particle with speed which retains an almost constant value within fairly large regions in the space-time continuum, but for which the speed is also slowly varying between very different extremum values from one such region to another, as an effect of weak external fields.

A relativistic generalization of the preceding theory should satisfy the following hierarchy of conditions, as it becomes more and more accurate:

- (a) The theory should allow the study of particles having an almost constant velocity (in direction and magnitude), and the results should be equivalent to those given by the nonrelativistic theory; however, there should be no need to specify any particular reference frame.
- (b) The theory should allow the study of processes where the speed of the particles is slowly varying, but within arbitrarily separated limits, under the effect of weak external fields.
- (c) The theory should retain its validity in general, even when the velocities of the particles vary arbitrarily.

It is likely that a rigorous theory satisfying condition (c) might be incompatible with the present-day quantum scheme. [For instance,] DIRAC's theory of the electron has largely proved its fruitfulness in the study of genuine relativistic phenomena, *e.g.*, scattering of hard γ -rays; however, this theory certainly satisfies condition (c) only incompletely as is shown by the well-known difficulties coming from the transitions to states having negative energy. On the contrary, it is probably true that a theory satisfying condition (b), and only partially satisfying condition (c), should not meet essential difficulties since its physical content might be essentially the same as that which justifies the SCHRÖDINGER equation, The most remarkable example of this type of generalization is provided precisely by Dirac's theory. However, since this theory can be applied to particles with intrinsic [angular] momentum $s = 1/2$, I have investigated equations formally similar to the ones by DIRAC, although considerably more involved; these equations allow us to consider particles with arbitrary (and, in particular, zero) angular momentum.

According to DIRAC, the wave equation of a material particle in the absence of external fields must have the following form:

$$(1) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0.$$

Equations of this kind present a difficulty in principle. Indeed, the operator β^* has to transform as the time component of a four-vector, and thus β cannot be simply a

(*) In "Il Nuovo Cimento" it is erroneously printed $^{-1}$ instead of β . (Note of the Editor, see also E. AMALDI, *op. cit.*)

multiple of the unit matrix, but must have at least two different eigenvalues, say β_1 and β_2 . However, this implies that the energy of the particle at rest, obtained from Eq. (1) by taking $p = 0$, shall have at least two different values, *i.e.* $\beta_1 mc^2$ and $\beta_2 mc^2$. According to DIRAC's equations, the allowed values of the mass at rest are, as well known, $+m$ and $-m$; from this it follows by relativistic invariance that for each value of p the energy can acquire two values differing in sign: $W = \pm\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$.

As a matter of fact, the indeterminacy in the sign of the energy can be eliminated by using equations of the type (1), only if the wave function has infinitely many components that cannot be split into finite tensors or spinors.

1. Equation (1) can be derived from the following variational principle:

$$(2) \quad \delta \int \tilde{\psi} \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi dV dt = 0$$

(one of the conditions imposed by relativistic invariance is, of course, that the form $\tilde{\psi}\beta\psi$ has to be invariant).

If now we require the energy at rest to be always positive, all the eigenvalues of β have to be positive so that the form $\tilde{\psi}\beta\psi$ will be positive definite. By means of a *nonunitarity* transformation $\psi \rightarrow \varphi$ it is then possible to reduce the expression at hand to the form unity:

$$(3) \quad \tilde{\psi}\beta\psi = \tilde{\varphi}\varphi.$$

By substituting in Eq. (2) ψ with its expression in terms of φ one obtains:

$$(4) \quad \delta \int \tilde{\varphi} \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi dV dt = 0,$$

from which the equations equivalent to Eq. (1): follow:

$$(5) \quad \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi = 0.$$

We have now to determine the transformation law of φ under a LORENTZ rotation, as well as the expressions for the matrices $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, in such a way as to respect the relativistic invariance of the variational principle (4), and thus to have an invariant integrand function in Eq. (4).

We begin by establishing the transformation law of φ and we note, first of all, that the invariance of $\tilde{\varphi}\varphi$ implies that we must restrict ourselves to unitary transformations. Moreover, in order to avoid exaggerated complications, we will give the transformation law only for infinitesimal LORENTZ transformations, since any finite transformation can

be obtained by integration of the former ones. We introduce the infinitesimal transformations in the variables ct, x, y, z ;

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad S_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ T_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

We also define

$$(7) \quad \begin{cases} a_x = iS_x; & a_y = iS_y; & a_z = iS_z; \\ b_x = -iT_x; & b_y = -iT_y; & b_z = -iT_z. \end{cases}$$

The operators a and b must be Hermitian operators in a unitary representation, and *vice versa*; furthermore, in order for the infinitesimal transformations to be integrable, they must satisfy certain relationships under commutation, as can be deduced from Eqs. (6) and (7):

$$(8) \quad \begin{cases} (a_x, a_y) = ia_z \\ (a_x, b_x) = 0 \\ (a_x, b_y) = ib_z \\ (a_x, b_z) = -ib_y \\ (b_x, b_y) = -ia_z \end{cases}$$

the remaining relations can be obtained by cyclic permutations of x, y, z .

The simplest solution of Eqs. (8) by means of Hermitian operators is given by the following infinite matrices, where the diagonal elements are labelled by two indices j and m ; we have to distinguish two possibilities according to the assumption $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$;

$m = j, j - 1, \dots, -j$, or $j = 0, 1, 2, \dots$; $m = j, j - 1, \dots, -j$:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (j, m | a_x - ia_y | j, m + 1) = \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} \\ (j, m | a_x + ia_y | j, m - 1) = \sqrt{(j + m)(j - m + 1)} \\ (j, m | a_z | j, m) = m \\ (j, m | b_x - ib_y | j + 1, m + 1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j + m + 2)} \\ (j, m | b_x - ib_y | j - 1, m + 1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j - m)(j - m - 1)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j + 1, m - 1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j - m + 1)(j - m + 2)} \\ (j, m | b_x + ib_y | j - 1, m - 1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j + m)(j + m - 1)} \\ (j, m | b_z | j + 1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j - m + 1)} \\ (j, m | b_z | j - 1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j + m)(j - m)}. \end{array} \right.$$

If we assume that, by reflection with respect to the origin, the $\varphi_{j,m}$ either remain unchanged or change in sign as j varies, b turns out to be a polar vector while a has axial properties.

The entities to which a and b apply will be called infinite tensors (or spinors) of zero index, for integer (respectively, half-integer) j . The nomenclature of "zero index" comes from the fact that the invariant

$$(10) \quad Z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

vanishes.

More general infinite spinors or tensors can be introduced for any value of Z . A simple way to obtain the spinors is as follows. Let us consider a general solution $\psi(q, t)$ of the DIRAC equation with no external field and transform it relativistically:

$$(11) \quad \psi(q, t) \rightarrow \psi'(q, t).$$

Thus, the transformation in the space variables:

$$(12) \quad \psi(q, 0) \rightarrow \psi'(q, 0)$$

is unitary. Now, if instead of general functions $\psi(q, 0)$ we consider only those belonging to a fixed eigenvalue z_0 so of the operator (10), which has a spectrum extending from $-\infty$ to $+\infty$, we obtain functions which transform under (12) as infinite spinors, each function appearing twice.

In the representation (12), the operators a_x and b_x have the following form:

$$a_x = \frac{2\pi}{h}(yp_z - zp_y) + \frac{1}{2}\sigma_x$$

$$b_x = \frac{2\pi}{h}x\frac{H}{c} + \frac{i}{2}\alpha_x$$

and similarly for a_y, a_z, b_y, b_z .

2. We have now to determine the operators $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ in such a way as to make Eq. (4) invariant. Since we consider only unitary transformations, these operators transform in the same way as the Hermitian forms related to them; thus, in order for the integrand fraction in (4) to be invariant, it is necessary that the operators in question form a covariant vector ($\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z \sim ct, -x, -y, -z$).

The interpretation of $\tilde{\varphi}\gamma_0\varphi$ and $-\tilde{\varphi}\gamma\varphi$ as charge and current densities is immediate. The γ operators must satisfy the following commutation relations:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_0, a_x) = 0 \\ (\gamma_0, b_x) = i\gamma_x \\ (\gamma_x, a_x) = 0 \\ (\gamma_x, a_y) = i\gamma_z \\ (\gamma_x, a_z) = -i\gamma_y \\ (\gamma_x, b_x) = i\gamma_0 \\ (\gamma_x, b_y) = 0 \\ (\gamma_x, b_z) = 0 \end{array} \right.$$

and the others obtained by cyclic permutation of x, y, z . As can be easily checked, the commutation relations (13), determine $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ to within a constant factor. One finds:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = j + \frac{1}{2} \\ (j, m|\gamma_x - i\gamma_y|j + 1, m + 1) = -\frac{i}{2}\sqrt{(j + m + 1)(j + m + 2)} \\ (j, m|\gamma_x - i\gamma_y|j - 1, m + 1) = -\frac{i}{2}\sqrt{(j - m)(j - m - 1)} \\ (j, m|\gamma_x + i\gamma_y|j + 1, m - 1) = \frac{i}{2}\sqrt{(j - m + 1)(j - m + 2)} \\ (j, m|\gamma_x + i\gamma_y|j - 1, m - 1) = \frac{i}{2}\sqrt{(j + m)(j + m - 1)} \\ (j, m|\gamma_z|j + 1, m) = \frac{i}{2}\sqrt{(j + m + 1)(j - m + 1)} \\ (j, m|\gamma_z|j - 1, m) = -\frac{i}{2}\sqrt{(j + m)(j - m)}. \end{array} \right.$$

The omitted matrix elements of γ_x , γ_y , γ_z vanish. It should be noticed that the Hermitian form $\varphi\gamma_0\varphi$ is positive definite, as the physical interpretation requires.

We now want to translate the equations written in the form (5) into the form of Eq. (5). For this, it suffices to write

$$(15) \quad \varphi_{j,m} = \frac{\psi_{j,m}}{\sqrt{j + \frac{1}{2}}},$$

since then the form related to γ_0 reduces to the unit form. In this way we obtain equations having the desired form

$$(16) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0,$$

where $\beta = \frac{1}{j + \frac{1}{2}}$ and the non-vanishing components of α_x , α_y , α_z are, given as follows:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j + 1, m + 1) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j + m + 2)}{(j + \frac{1}{2})(j + \frac{3}{2})}} \\ (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j - 1, m + 1) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m)(j - m - 1)}{(j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j + 1, m - 1) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m + 1)(j - m + 2)}{(j + \frac{1}{2})(j + \frac{3}{2})}} \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j - 1, m - 1) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j + m - 1)}{(j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})}} \\ (j, m | \alpha_z | j + 1, m) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j - m + 1)}{(j + \frac{1}{2})(j + \frac{3}{2})}} \\ (j, m | \alpha_z | j - 1, m) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j - m)}{(j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})}} \end{array} \right.$$

In looking for solutions of Eq. (16) corresponding to plane waves with positive mass, one finds all those which can be derived by means of a relativistic transformation from a zero-momentum plane wave. For these, the energy is given by

$$(18) \quad W_0 = \frac{mc^2}{j + \frac{1}{2}}.$$

For half-integer values of j we thus obtain states corresponding to the values $m, m/2, m/3, \dots$, of the mass, while for integer j one has $2m, 2m/3, 2m/5, \dots$

It should be emphasized that particles having different masses also have different intrinsic angular momentum, the latter having a determined value only in the system where the particle is at rest.

If we consider the set of all states belonging to the value $\frac{m}{s+\frac{1}{2}}$ of the rest mass, as is realized in nature, all other states having no significance, we obtain an invariant theory for particles of angular momentum s ; in the absence of an external field, this theory can be regarded as satisfactory. One can easily verify that in the case of slow movements and for particles having intrinsic angular momentum s , only the functions $\psi_{s,m}$ are appreciably different from zero and satisfy the SCHRÖDINGER equation with mass $M = \frac{m}{s+\frac{1}{2}}$; the functions $\psi_{s+1,m}$ and $\psi_{s-1,m}$ are then of order v/c , while $\psi_{s+2,m}$, and $\psi_{s-2,m}$ are of order v^2/c^2 , and so on.

In this way we obtain only two equations; the one suitable for the description of particles with noninteger angular momentum and the other pertinent to zero or integer angular momentum.

Besides the states pertinent to positive values of the mass, there are other states for which the energy is related to the momentum by a relation of the following type:

$$(19) \quad W = \pm \sqrt{c^2 p^2 - k^2 c^4};$$

such states exist for all positive values of k but only for $p \geq kc$, and can be regarded as pertaining to the imaginary value ik of the mass.

The "spin" functions belonging to plane waves with $p \neq 0$ have a particularly simple expression in the case of particles with no intrinsic angular momentum if $p_x = p_y = 0$, $p_z = p$. Apart from a normalization factor for these functions, one finds

$$(20) \quad \begin{cases} \psi_{j,0} = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)} \left(i \frac{\eta - j}{\varepsilon}\right)^j \\ \psi_{j,m} = 0 \quad \text{for } m \neq 0, \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

where

$$(21) \quad \varepsilon = \frac{p}{Mc}, \quad \eta = \frac{\sqrt{M^2 c^2 + p^2}}{Mc}$$

and $M = 2m$ is the mass at rest.

3. We want now to discuss briefly the introduction of the electromagnetic field into Eq. (16).

The simplest way to perform the transition from the field equations without external field to those with an external field is to substitute for W and p , the quantities $W - e\varphi$ and $p - \frac{e}{c}A$, respectively, e being the charge of the particle and φ and A being the scalar and vector potentials. However, other possibilities are also open. For instance, one can

add other invariant terms, analogous to those introduced by PAULI⁽²⁾ in the theory of the magnetic neutron. Those additional terms contain as a factor the field forces instead of the electromagnetic potentials and thus do not destroy the invariance of the field equations coming from the indeterminacy of the potentials.

This artifice allow us to ascribe an arbitrarily fixed magnetic moment to particles having a non-vanishing angular momentum. For instance, in the case of the electron, by means of the simple substitutions $W, p \rightarrow W - e\varphi, p - \frac{e}{c}A$, one finds a magnetic moment equal to $+\frac{1}{2}\mu_0$, instead of $-\mu_0$.

Thus, if we want to specialize our theory to a theory for the electron and maintain as far as possible good agreement with the experimental data, we have to modify the magnetic moment by introducing additional terms. However, the electron theory obtained in this way is a useless copy of DIRAC's theory, the latter remaining completely preferable thanks to its simplicity and to the wide support from experiment. On the other hand, the advantage of the present theory lies in its applicability to particles with angular momentum different from $1/2$.

The equations, including both the external field and the additional terms which modify the intrinsic magnetic moment, have the following form:

$$(22) \quad \left[\left(\frac{W}{c} - \frac{e}{c}\varphi \right) + \left(a, p - \frac{e}{c}A \right) - \beta mc + \lambda(a', H) + \lambda(b', E) \right] \psi = 0,$$

where a' stands for (a'_x, a'_y, a'_z) and b' for (b'_x, b'_y, b'_z) , while E and H represent the electric and magnetic field.

The matrix a'_x can be deduced from a_x of Eq. (9) by means of the rule

$$(23) \quad (j, m | a'_x | j', m') = \frac{1}{\sqrt{(j + \frac{1}{2})(j' + \frac{1}{2})}} (j, m | a_x | j', m')$$

and similarly for a'_y, a'_z, b'_y, b'_z .

For particles having intrinsic angular momentum $s = 1/2$ the choice $\lambda = \frac{2}{c}\mu$ should be made if μ is the magnetic moment which one wants to add to the one which naturally arises from the introduction of the electromagnetic potentials into the wave equation. As seen before, the latter magnetic moment has in this case, the value $-\frac{1}{2} \frac{eh}{4\pi mc}$. For particles having no intrinsic magnetic moment it is natural to choose $\lambda = 0$.

Regarding the practical solutions of the wave equations, we recall that for slow movements they are finite and that those $\psi_{j,m}$ which satisfy to the SCHRÖDINGER equations are only those which have j equal to the intrinsic angular momentum in units $h/2\pi$.

For instance, for particles having no intrinsic momentum, one is left with one component only, namely $\psi_{0,0}$, while $\psi_{1,m}$ are of order v/c , v being the speed of the particle,

(2) Quoted by OPPENHEIMER, "Phys. Rev.", 41, 763 (1932).

$\psi_{2,m}$ are of order v^2/c^2 , and so on. In this way one succeeds in eliminating, by successive approximations, the small components and in particular one arrives at very simple expansions for the calculation of the first relativistic corrections.

* * *

I particularly thank Prof. E. FERMI for discussions of the present theory.

Comment on the Scientific Paper no. 7: "Relativistic theory of particles with arbitrary intrinsic angular momentum."

The central problem in constructing a purely wave-mechanical relativistic generalization of Schrödinger's equation is the emergence of negative-energy solutions. Even if we assume that only positive-energy states are physically meaningful, the resulting theory would be unstable with respect to transitions to negative-energy states. Dirac tried to avoid this problem by writing a first order-wave equation

$$(1) \quad i \frac{d\psi}{dt} = \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi, \quad \text{or:} \quad (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\psi = 0.$$

If, following Dirac we assume anticommutation relations, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, this equation describes a particle of mass m , but admits both positive and negative energy solutions. Dirac's solution for this problem was to assume that all negative-energy states are occupied, so that thanks to the Pauli exclusion principle a positive-energy particle cannot jump into a negative-energy state. In this version Dirac's theory goes far beyond wave mechanics, and is essentially equivalent to the modern field-theoretical formulation, admirably presented in Majorana's "Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone".

In his paper on particles of arbitrary spin, Majorana tried to construct a fully relativistic *wave mechanics* that completely avoids the negative-energy states. He was able to show that a *necessary* condition for the absence of negative-energy states is that the operator β has only positive eigenvalues, and in turn this implies that $\phi = \beta^{1/2}\psi$ transforms according to a unitary representation of the Lorentz group. In this paper Majorana displays a complete mastery of the theory of groups. E. Amaldi⁽¹⁾ recalls Majorana's admiration for the work of H. Weyl and E. Wigner on the application of group theory to quantum mechanics. In this paper we can find traces of Weyl's discussion of the Lie

(¹) E. AMALDI, *op. cit.*

algebra of the rotation group, extended here to the case of the Lorentz group, in particular when he introduces the commutation rules of the group generators as “integrability conditions”. Starting from the commutation relations, Majorana builds the “simplest” infinite-dimensional unitary representations of the Lorentz group, one for integer angular momentum and one for semi-integer angular momentum, and constructs explicitly the corresponding infinite-dimensional representations of the $\vec{\alpha}$ and β matrices that appear in Dirac’s equation.

The Majorana versions of equation (1) have solutions that respectively describe particles of arbitrary integer or semi-integer spin angular momentum j , with mass

$$(2) \quad M_j = \frac{m}{j + \frac{1}{2}}.$$

The avoidance of negative-energy solutions has a very high price: the existence of an infinite sequence of states with increasing spin and decreasing mass. Majorana could not accept this conclusion and leaves open the possibility that his equation could describe a single particle of arbitrary spin j_0 by declaring that all solutions with $j \neq j_0$ are to be considered as “unphysical”. He mentions in particular the possibility of using the integer-spin version of the equation to describe a spinless particle. He, however, realizes that in the presence of interactions it would be difficult to ensure the absence of transitions to states of different spin. In a different context this is the same problem that plagued the wave mechanics interpretation of Dirac’s equation. The disease is made worse here by the presence, briefly mentioned in Majorana’s paper, of what we now call “tachyonic” solutions, that would correspond to states with imaginary mass ik , with $E = \pm \sqrt{c^2 \vec{p}^2 - k^2 c^4}$, that exist for $|\vec{p}| > k$ and for any value of k .

Majorana’s paper was written in the early summer of 1932, just before Anderson announced the discovery of the positive electron, thus sealing the triumph of Dirac’s electron theory. It received little attention, in spite of the brilliant and original results on the unitary representations of the Lorentz group that were rediscovered years later by Wigner. Extensive references to the successive developments in this field can be found in the review of Majorana’s paper by D. M. Fradkin⁽²⁾.

If Majorana’s paper on particles with arbitrary spin had not been totally forgotten, it could be considered a precursor of some of the most actively pursued recent developments in theoretical physics. In the sixties the study of Regge-poles and the discovery of high-spin hadrons briefly rekindled the interest for theories, based on fields that transform according to infinite-dimensional representations of the Lorentz group, that describe a sequence of particles with increasing spin and increasing mass. These attempts had their highest expression in the dual models of hadrons but, as in the case of Majorana’s theory, were plagued by the existence of tachyonic states that could only be avoided

(2) D. M. FRADKIN, *Am. J. Phys.* **34** (1966) 314.

in a space-time with a large number of dimensions. In view of these difficulties and of the emergence of Quantum Chromo Dynamics the application of these ideas to hadron physics was abandoned, but they resurfaced later in modern string theories.

NICOLA CABIBBO
Università di Roma “La Sapienza”

Über die Kerntheorie

Von ETTORE MAJORANA, zur Zeit in Leipzig
Mit 3 Abbildungen (Eingegangen am 3 März 1933)

“Zeitschrift für Physik”, Bd. 82, 1933, pp. 137-145.

Es wird eine Neubegründung der Heisenbergschen Kerntheorie diskutiert, die zu einer etwas abweichenden Hamiltonfunktion führt. Dementsprechend wird eine statistische Behandlung der Kerne entwickelt.

Die Entdeckung des Neutrons, d. h. eines schweren und ladungslosen Elementarteilchens, hat die Möglichkeit geboten, eine Kerntheorie aufzubauen, die, ohne allerdings die grundsätzlichen mit dem β -Zerfall verbundenen Schwierigkeiten aufzulösen, wohl aber die Begriffe der Quantenmechanik in einem Bereich zu benutzen gestattet, der geschlossen schien. Nach HEISENBERG⁽¹⁾ ist es möglich, für viele Zwecke die Kerne als aus Protonen und Neutronen bestehend, d. h. aus Teilchen mit fast der gleichen Masse, die den Drehimpuls $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ haben und der Fermischen Statistik gehorchen, zu betrachten. Das Studium der Kerne ist also zurückgeführt auf die Aufsuchung einer geeigneten Hamiltonfunktion, die für ein solches System materieller Punkte gültig sei, und zwar in nichtrelativistischer Näherung, da die Geschwindigkeiten der Teilchen vermutlich ziemlich klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind ($v \sim \frac{c}{10}$). Um eine zweckmäßige Wechselwirkung zwischen den Bausteinen der Kerne aufzustellen, hat sich HEISENBERG von einer offensibaren Analogie leiten lassen. Das Neutron wird als aus einem Proton und einem Elektron

⁽¹⁾ W. HEISENBERG, “Z. Physik”, 77, 1 (1932); 78, 156 (1933).

bestehend, also wie ein nach einem den jetzigen Theorien unzugänglichen Prozeß konzentriertes Wasserstoffatom gedacht und zwar so, daß es seine statistischen Eigenschaften und seinen Drehimpuls verändere. HEISENBERG nimmt nun an, daß zwischen Protonen und Neutronen Austauschkräfte wirken denjenigen ähnlich, die für die Molekularbindung von H und H^+ vor allem verantwortlich sind. Zu einer solchen Wechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen, die als maßgebend für die Kernstabilität betrachtet wird, fügen sich die Coulombabstoßungskräfte zwischen Protonen, Anziehungskräfte vom van der Waals-Typus zwischen Neutronen und eine Art von "elektrostatischer" Wechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen⁽²⁾.

Man kann natürlich an der Gültigkeit dieser Analogie zweifeln, denn einerseits gibt die Theorie keine Auskunft über die innere Struktur des Neutrons, andererseits scheint die Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton groß im Vergleich zum Massendefekt des Neutrons, wie er von CHADWICK bestimmt worden ist, zu sein. Ich glaube also, es sei nicht ohne Interesse zu zeigen, wie man zur Aufstellung einer der von HEISENBERG betrachteten sehr ähnlichen Hamiltonfunktion gelangen kann, wenn man nur die allgemeinsten und offenbarsten Kerneigenschaften am einfachsten wiedergeben will. Wir werden dafür ein statistisches Verfahren zu benutzen haben, an dessen Zulässigkeit für Größenordnungsbestimmungen kaum zu zweifeln ist. Ich möchte noch darauf aufmerksam machen, daß infolge des von mir festgelegten Kriteriums für die Auswahl der Hamiltonfunktion jetzt die Austauschkräfte das umgekehrte Vorzeichen wie in der Heisenbergschen Theorie haben, daher, sind die Symmetriecharaktere der Eigenfunktionen, die zum Normalzustand gehören, und die ganze statistische Behandlung verschieden von der in HEISENBERGS Arbeit.

1. Die ziemlich zahlreichen Auskunftquellen, die wir über die Kernstruktur besitzen, d. h. radioaktive Zerfälle, künstliche Zerfälle und Anregungen, anomale Streuung von α -Teilchen, Massendefektmessungen usw., scheinen einstimmig darauf hinzudeuten, daß den Kernen keine stark unitäre, den Atomen ähnliche Organisation zuzuschreiben ist. Im Gegenteil sieht es so aus, als ob die Kerne aus ziemlich unabhängigen Konstituenten bestehen, die nur bei unmittelbarer Berührung aufeinander wirken. Man findet so im Zentrum des Atoms eine Art von Materie wieder, die mit denselben Eigenschaften von Ausdehnung und Undurchdringlichkeit versehen ist wie die makroskopische Materie. Aus einer solchen Materie sind die leichten und schweren Kerne ebenfalls konstituiert und der Unterschied zwischen den einen und den anderen hängt vor allem von ihrem verschiedenen Inhalt von "Kernmaterie" ab. Eine solche Vorstellung kann natürlich nur richtig sein, wenn die Coulombabstoßung zwischen den positiven Konstituenten der Kerne keine sehr große Rolle spielt; das ist sicher der Fall für ziemlich leichte Kerne: für die schwereren Kerne muß infolgedessen eine gewisse Korrektur eingeführt werden.

Nehmen wir nach dem oben Gesagten an, daß die Kerne aus Protonen und Neutronen bestehen, so ist unser Problem, das einfachste Wechselwirkungsgesetz zwischen diesen

(²) W. HEISENBERG, ebenda 80, 587 (1933).

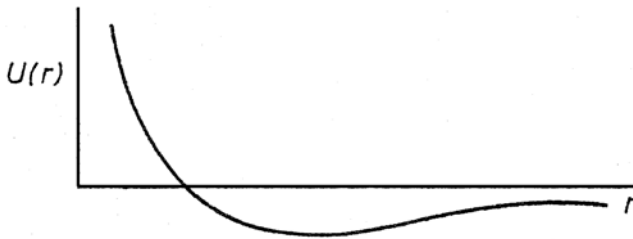


Fig. 1. – Potentielle Energie zwischen zwei Atomen.

Teilchen, aufzustellen, welches, sofern die elektrostatische Abstoßung vernachlässigbar ist, zur Definition einer undurchdringlichen Materie führt. Es handelt sich eigentlich darum, drei Wechselwirkungsgesetze aufzustellen, und zwar zwischen Protonen, zwischen Protonen und Neutronen und zwischen Neutronen. Wir werden aber der Einfachheit halber annehmen, daß zwischen jedem Paar von Protonen nur die Coulombsche Kraft wirke; diese Annahme kann sich darauf einigermaßen stützen, daß der klassische Radius der Protonen viel kleiner als der mittlere Abstand der Teilchen innerhalb des Kernes ist. Ferner kommt der Coulombschen Kraft keine große Wichtigkeit für leichte Kerne zu, und da diese aus beinahe ebensovielen Neutronen wie Protonen bestehen, liegt es nahe, als wichtigste Ursache der Kernstabilität eine besondere Wechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen zu betrachten; zwischen den Neutronen aber nehmen wir an, daß keine merkliche Wechselwirkung sich abspiele, da kein sicherer Grund für das Gegenteil vorliegt. Also müssen wir nunmehr nur eine geeignete Kopplung zwischen Protonen und Neutronen aufstellen. Infolge der schon hervorgehobenen, scheinbaren Ähnlichkeit zwischen der Kernstruktur und derjenigen der festen Körper oder der Flüssigkeiten könnte es plausibel scheinen, eine Wechselwirkung von demselben Typus wie für Atome und Moleküle, d. h. Anziehungskräfte bei großem Abstand und stark abstoßende Kräfte bei kleinem Abstand festzulegen, so daß die "Undurchdringlichkeit" der Teilchen gesichert ist (siehe Fig. 1). Außerdem müßte man aber noch Abstoßungskräfte zwischen Neutronen bei kleiner Entfernung annehmen, um die gewünschte Proportionalität zwischen Teilchenzahl und Kernvolumen zu erhalten. Eine solche Lösung des Problems ist aber vom ästhetischen Standpunkt aus unbefriedigend, denn man muß nicht nur Anziehungskräfte von unbekanntem Ursprung zwischen den Elementarteilchen annehmen sondern noch, bei kleinem Abstand, Abstoßungskräfte von ungeheurer Größenordnung, die von einem Potential von etwa einigen hundert Millionen Volt abhängen. Wir wollen deshalb einen anderen Weg einschlagen, mit Einführung von so wenigen willkürlichen Elementen, wie es möglich ist. Die Hauptschwierigkeit, die zu überwinden ist, besteht in der Frage, wie man zu einer von der Masse des Kernes unabhängigen Dichte gelangen kann, ohne die freie Beweglichkeit der Teilchen durch eine künstliche Undurchdringlichkeit zu hindern. Wir dürfen z.B. nach einem Typus von Wechselwirkung suchen, bei dem die mittlere Energie pro Teilchen nie eine gewisse Grenze überschreiten kann, wie groß auch die Dichte sein mag; das könnte eintreten infolge irgendeiner Absättigungserscheinung, die der Valenzsättigung einigermaßen analog sein dürfte. Eine solche Wechselwirkung zwi-

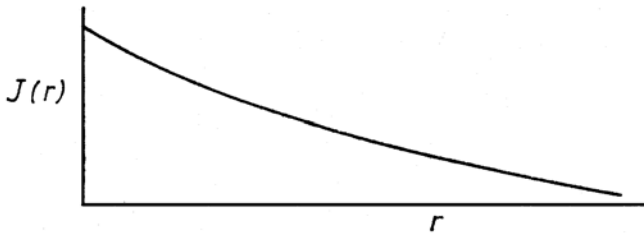


Fig. 2. – Gang der Resonanzkräfte.

schen Neutronen und Protonen wird, wie wir beweisen werden, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(1) \quad (Q', q' | J | Q'', q'') = -\delta(q' - Q'')\delta(q'' - Q')J(r).$$

Hierbei ist $r = |q' - Q'|$ gesetzt worden und Q und q sind die Koordinaten eines Neutrons bzw. eines Protons. Die Funktion $J(r)$ ist positiv und sie darf den in Fig. 2 bezeichneten Gang aufweisen. Der Ausdruck (1) bedeutet, daß zwischen dem Neutron und dem Proton Anziehung bzw. Abstoßung stattfindet, je nachdem die Wellenfunktion ungefähr symmetrisch oder antisymmetrisch in den beiden Teilchen ist. Um der besonderen Stabilität des α -Teilchens Rechnung zu tragen, werden wir noch annehmen, daß Q und q in (1) nur die Schwerpunktskoordinaten mit Ausschließung des Spins sein sollen. So erhält man, daß auf jedes Proton im α -Teilchen beide Neutronen statt eins wirken und umgekehrt, da wir eine symmetrische Funktion in den Schwerpunktskoordinaten aller Protonen und Neutronen (was streng bei Vernachlässigung der Coulombschen Energie der Protonen gilt) annehmen können. Im α -Teilchen sind alle vorhandenen vier Partikeln in demselben Zustand, so daß es eine abgeschlossene Schale in höherem Sinne als das Heliumatom ist. Geht man vom α -Teilchen zu schwereren Kernen über, so kann man nicht mehr, wegen des Pauliverbotes, weitere Teilchen in demselben Zustand ansetzen, und da außerdem die Austauschenergie (1) nur dann im allgemeinen groß ist, wenn Proton und Neutron sich in demselben Zustand befinden, muß man erwarten, was genau der Erfahrung entspricht, daß bei schweren Kernen der Massendefekt pro Partikel nicht wesentlich größer als beim α -Teilchen sein dürfte.

Wir wollen jetzt den Ausdruck (1) der Wechselwirkungsenergie zwischen Proton und Neutron mit demjenigen vergleichen, den man aus dem Resonanzglied der Heisenbergschen Hamiltonfunktion herleiten kann, wenn man durch Betrachtung der Neutronen und Protonen als verschiedener Teilchen die unbequeme ρ -Spinkoordinate eliminiert. Dann findet man einen zu (1) ähnlichen Ausdruck, aber mit zwei grundsätzlichen Unterschieden. Erstens nach Heisenbergschem Ausdruck sollen Q und q in (1) alle Koordinaten einschließlich des Spins bezeichnen. Zweitens nimmt HEISENBERG für die Resonanzkräfte das umgekehrte Vorzeichen an, was für die statistischen Folgen am wichtigsten ist, denn infolgedessen sind die Symmetriecharaktere der Eigenfunktionen bei der Heisenbergschen Theorie solche, daß keine Absättigung stattfindet und noch Abstoßungskräfte

bei kleinen Entfernungen notwendig sind⁽³⁾. Wir werden jetzt näher untersuchen, in welcher Weise diejenige Absättigung eintritt, die zur experimentellen Erscheinung der Undurchdringlichkeit der Kernkonstituenten führt.

2. In erster Näherung betrachten wir die Eigenfunktion des Kernes als durch ein Produkt zweier Funktionen darstellbar, die von den Koordinaten der n_1 , Neutronen, bzw. der n_2 , Protonen, abhängen:

$$(2) \quad \psi = \psi_N(Q_1, \Sigma_1, \dots, Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}) \psi_P(q_1, \sigma_1, \dots, q_{n_2}, \sigma_{n_2})$$

und denken wir uns ψ_N und ψ_P als aus Produkten von individuellen, orthogonalen Eigenfunktionen durch Antisymmetrisierung erhalten:

$$(3) \quad \begin{cases} \psi_N = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \sum_R \pm R \psi'_N(Q_1, \Sigma_1) \cdots \psi_N^{n_1}(Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}), \\ \psi_P = \frac{1}{\sqrt{n_2!}} \sum_R \pm R \psi'_P(q_1, \sigma_1) \cdots \psi_P^{n_2}(q_{n_2}, \sigma_{n_2}). \end{cases}$$

Im Falle einer großen Anzahl von Teilchen dürfen die individuellen Wellenfunktionen ψ mit freie Teilchen darstellenden Wellenpaketen identifiziert werden. Aus der Rechnung wird es sich ergeben, daß jedes Proton im Mittel der Wirkung einer keinen Anzahl (eins oder zwei) Neutronen unterliegt und umgekehrt; daher führt die Annahme von zu freien Teilchen gehörenden Wellenfunktionen infolge merklicher Polarisierungseffekte einen gewissen Fehler ein. Die Methode ist aber für Größenordnungsbestimmungen ohne Zweifel anwendbar.

Wir müssen also den über die Eigenfunktion (2) genommenen Mittelwert der gesamten Energie berechnen und nach den Bedingungen suchen, unter denen er minimal wird. Die Energie besteht aus drei Teilen:

$$(4) \quad W = T + E + A,$$

wobei T die kinetische Energie, E die elektrostatische Energie der Protonen und A die Austauschenergie bezeichnen sollen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß alle individuellen im Schwerpunkt festgesetzten Zustände entweder frei oder zweimal mit entgegengesetzter Spinrichtung besetzt seien. Dann sind n_1 und n_2 gerade Zahlen. Wir führen noch die Diracschen Dichtenmatrizen ein:

$$(5) \quad \begin{cases} (q' | \rho_N | q'') = \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_1} \psi_N^i(q', \sigma_i) \bar{\psi}_N^i(q'', \sigma_i), \\ (q' | \rho_P | q'') = \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_2} \psi_P^i(q', \sigma_i) \bar{\psi}_P^i(q'', \sigma_i). \end{cases}$$

⁽³⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", 80, 587 (1933). Für die Möglichkeit, diese Arbeit vor der Publikation zu sehen, bin ich Herrn Prof. HEISENBERG zum größten Dank verpflichtet.

Es gelten die Gleichungen:

$$(6) \quad \rho_N^2 = 2\rho_N, \quad \rho_P^2 = 2\rho_P,$$

wobei der Faktor 2 vom Spin herrührt, und daraus folgt:

$$(7) \quad \rho_N = \begin{matrix} & 2 \\ & \swarrow \\ & 0 \end{matrix}, \quad \rho_P = \begin{matrix} & 2 \\ & \swarrow \\ & 0 \end{matrix}.$$

Wenn M die Masse jedes Teilchens, näherungsweise dieselbe für Neutronen und Protonen, ist, wird sich ergeben:

$$(8) \quad T = \frac{1}{2M} \text{Spur} [(\rho_N + \rho_P)p^2],$$

$$(9) \quad E = \frac{e^2}{2} \int (q'|\rho_P|q') \frac{1}{|q' - q''|} (q''|\rho_P|q'') dq' dq'' + \dots$$

Wir haben in (9) ein Glied, das im wesentlichen die *gewöhnliche*, von der Coulombschen Wechselwirkung der Protonen abhängige Austauschenergie darstellt, weggelassen. Dieses Glied ist von DIRAC⁽⁴⁾ berechnet worden, und es ist nicht sehr wichtig, wenn die Anzahl der Teilchen groß ist.

Wir haben schließlich:

$$(10) \quad A = - \int (q'|\rho_N|q'') J|q' - q''| (q''|\rho_P|q') dq' dq''.$$

Wenn die Zahl der Teilchen groß ist, dürfen ρ_N und ρ_P als fast diagonale Matrizen und sogar als klassische Funktionen von p und q betrachtet werden, und zwar ist die beste Bindung zwischen Matrizen und klassischen Funktionen⁽⁵⁾ durch folgende Beziehungen gegeben:

$$(11) \quad \begin{cases} \left(q - \frac{v}{2} |\rho_N| q + \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{h^3} \int \rho_N(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)} dp, \\ \left(q - \frac{v}{2} |\rho_P| q + \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{h^3} \int \rho_P(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)} dq \end{cases}$$

und durch diejenige, die man aus Umkehrung der Fourierschen Integrale erhält.

⁽⁴⁾ P. A. M. DIRAC, "Proc. Cambridge Phil. Soc.", 26, 376 (1930).

⁽⁵⁾ Siehe z. B. DIRAC, ebenda.

Wenn man in die vorigen Ausdrücke (11) einsetzt, bekommt man(*):

$$(12) \quad T = \frac{1}{2M} \int \frac{\rho_N(p, q) + \rho_P(p, q)}{h^3} p^2 dp dq,$$

$$(13) \quad E = \frac{e^2}{2} \int \frac{\rho_N(p, q)\rho_P(p', q')}{h^6} \frac{1}{|q - q'|} dp dq dp' dq',$$

$$(14) \quad A = \int \frac{\rho_N(p, q)V_N(p, q)}{h^3} dp dq = \int \frac{\rho_P(p, q)V_P(p, q)}{h^3} dp dq,$$

wobei $V_N(p, q)$ und $V_P(p, q)$ die klassischen Funktionen, die den Matrizen

$$(15) \quad \begin{cases} (q'|V_N|q'') = -(q'|\rho_P|q'')J|q' - q''|, \\ (q'|V_P|q'') = -(q'|\rho_N|q'')J|q' - q''| \end{cases}$$

entsprechen, bezeichnen sollen.

Wir nehmen nun an, daß in der Nähe eines Punktes q die Zustände kleiner Energie besetzt seien, sowohl von den Neutronen wie von den Protonen. Es wird dann einen maximalen Wert des Impulses $P_N(q)$ für die Neutronen und einen solchen für die Protonen geben; und als Folge von (7) wird sein:

$$(16) \quad \rho_N(p, q) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } p < P_N(q), \\ 0, & \text{wenn } p > P_N(q), \end{cases}$$

$$(17) \quad \rho_P(p, q) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } p < P_P(q), \\ 0, & \text{wenn } p > P_P(q). \end{cases}$$

Betrachten wir zunächst einen Grenzfall, d. h. den Fall sehr hoher Dichte, so daß h/p_N , und h/p_P , die der Größenordnung nach der gegenseitigen Entfernung der Teilchen im Kern entsprechen, klein im Vergleich zum Wirkungsradius der Resonanzkräfte sind. Nehmen wir noch an, daß $P_N > P_P$, also die Dichte der Neutronen größer als diejenige der Protonen sei, und bemerken wir, daß man in der zweiten Gleichung (15) infolge der praktischen Diagonalität von $\rho_N J|q' - q''|$ durch den Grenzwert $J(0)$ ersetzen kann, wenn $J(0)$ endlich ist, so wird diese Gleichung einfach

$$(q'|V_P|q'') = -J(0)(q'|\rho_N|q''),$$

(*) In "Zeitschrift für Physik" ist die Gleichung (13) irrtümlich ohne des Integral-Zeichen gedruckt worden. (Fußnote des Herausgebers.)

woraus folgt

$$(18) \quad V_P(p, q) = -J(0)\rho_N(p, q).$$

Wenn wir nun in (14) diese einsetzen und bemerken, daß, wenn $\rho_P(p, q) > 0$, auch immer $\rho_N = 2$ ist, bekommen wir

$$(19) \quad A = -2J(0) \int \frac{\rho_P(p, q)}{h^3} dp dq = -2J(0)n_2.$$

Das bedeutet, daß die von den Austauschkräften abhängige Bindungsenergie pro Proton im Falle sehr hoher Teilchendichte bloß gleich $-2J(0)$ ist, wenn die Neutronendichte nur größer ist als die Protonendichte. Vernachlässigen wir zunächst die Coulombsche gegenseitige Abstoßung zwischen den Protonen, was für leichte Kerne mit einer gewissen Näherung zulässig ist, und setzen wir das Verhältnis n_1/n_2 , aber nicht die Dichte fest: dann wird die potentielle Energie pro Teilchen eine gewisse Funktion der gesamten Dichte:

$$(20) \quad a = a(\mu), \quad \mu = \frac{8\pi}{3h^3} (P_N^3 + P_P^3),$$

die natürlich für $\mu = 0$ verschwindet und sich dem konstanten Wert $-\frac{2n_2}{n_1+n_2}J(0)$ für $\mu \rightarrow \infty$ nähert. Dieser Grenzwert wird das Minimum $-J(0)$ erreichen, wenn $n_1 = n_2$ ist. Für mittlere Dichten ist der allgemeine Ausdruck von $a(\mu)$ wegen (10) und (11) durch(*)

$$(21) \quad a = \frac{1}{\mu(q)} \iint \frac{\rho_N(p, q)\rho_P(p', q)}{h^6} G(p, p') dp dp'$$

gegeben, wobei $G(p, p')$ eine Funktion von $|p - p'|$ ist, die folgendermaßen mit $J(r)$ zusammenhängt:

$$(22) \quad G(p, p') = \int e^{-\frac{2\pi i}{h}(p-p', v)} J|v| dv.$$

Die kinetische Energie pro Teilchen wird die Form haben:

$$t = \kappa\mu^{2/3}$$

und die gesamte Energie $a + t$ kann ein Minimum für einen gewissen, nur vom Verhältnis n_1/n_2 abhängigen Wert erreichen (Fig. 3). Man erhält also eine konstante, von der Masse des Kernes unabhängige Dichte, und so ein Kernvolumen und einen Energieinhalt bloß proportional der Anzahl der Teilchen, wie die Erfahrung verlangt. Man kann

(*) In "Zeitschrift für Physik" ist im Nenner von gleichung (21) irrtümlich h^σ gedruckt worden. (Fußnote des Herausgebers.)

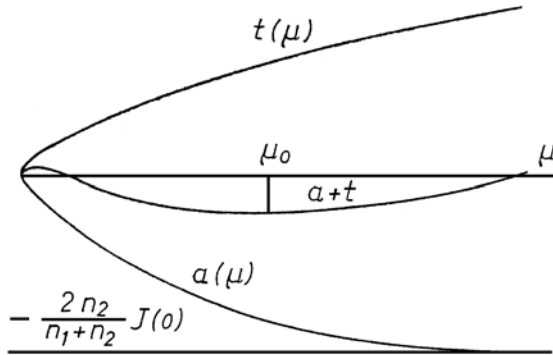


Fig. 3. – Kinetische und potentielle Energie pro Teilchen.

versuchen, die Funktion $J(r)$ so zu bestimmen, daß die experimentellen Angaben am besten wiedergegeben werden. Der Ausdruck(*)

$$J(r) = \lambda \frac{e^2}{r}$$

z. B. mit einer willkürlichen Konstante ist zweckmäßig, wenn er auch unendlich bei $r = 0$ wird. Er ist aber bei großem Abstand zu modifizieren, da er einen unendlichen Wirkungsquerschnitt für den Zusammenstoß zwischen Proton und Neutron gibt; außerdem scheint er ein zu kleines Verhältnis für die Massendefekte vom α -Teilchen und vom Wasserstoffisotop zu liefern. So muß man einen Ausdruck mit mindestens zwei Konstanten benutzen, z. B. eine Exponentialfunktion, $J(r) = Ae^{-\beta r}$. Wir werden aber auf diese Untersuchung nicht näher eingehen, denn, wie schon hervorgehoben, kann die erste statistische Näherung zu erheblichen Fehlern führen, wie groß auch die Anzahl der Teilchen ist. Für schwere Kerne spielt die Coulombsche Kraft eine wichtige Rolle, und sie hat zur Folge, daß die Kernaushdehnung etwas anwächst, und auch die Dichte, sowohl der Neutronen wie der Protonen, nicht mehr örtlich konstant ist. Die Austauschbindungsenergie wird jetzt nicht bloß vom Verhältnis n_1/n_2 abhängen, sie wird sogar etwas kleiner als im Falle leichter Kerne sein, infolge der von den Coulombschen Kräften verursachten Verminderung der Dichte.

* * *

Ich möchte Herrn Prof. HEISENBERG für zahlreiche Ratschläge und Erörterungen herzlich danken. Auch Herrn Prof. EHRENFEST sei für wertvolle Diskussion bestens gedankt. Endlich danke ich noch dem Consiglio Nazionale delle Ricerche für die Ermöglichung meines Aufenthaltes in Leipzig.

(*) In "Zeitschrift für Physik" ist der erste Ausdruck der gleichung irrtümlich als $J(n)$ gedruckt worden. (Fußnote des Herausgebers.)

Sulla teoria dei nuclei

ETTORE MAJORANA

“La Ricerca Scientifica”, vol. 4 (1) 1933, pp. 559-563.

Riassunto. — L'autore propone alcune correzioni alla teoria di HEISENBERG di cui sono particolarmente discussi i fondamenti sperimentali. Viene inoltre descritto un procedimento di carattere statistico per l'applicazione della teoria ai nuclei pesanti.

La scoperta del neutrone, cioè di una particella elementare pesante e senza carica elettrica, ha offerto la possibilità di edificare una teoria della struttura nucleare che, senza risolvere le difficoltà connesse con lo spettro continuo dei raggi β , permette tuttavia di utilizzare largamente i concetti della meccanica quantistica in un campo che sembrava loro estraneo. Secondo HEISENBERG⁽¹⁾ è possibile per molti scopi considerare i nuclei come costituiti da protoni e da neutroni, particelle provviste del momento meccanico intrinseco $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ che obbediscono alla statistica di FERMI e hanno all'incirca la stessa massa. La velocità media di queste particelle all'interno dei nuclei è presumibilmente abbastanza piccola di fronte a quelle della luce ($v \sim \frac{c}{10}$) e si può pertanto ritenere che siano applicabili con grande approssimazione i metodi ordinari della meccanica quantistica non relativistica. Rimane da stabilire la legge di interazione fra i costituenti nucleari, e a questo fine HEISENBERG si è lasciato guidare, in mancanza di altri criteri direttivi, dall'analogia che sussisterebbe fra il comune atomo neutro di idrogeno e il neutrone se questo è costituito, come generalmente si suppone, da un protone e da un elettrone. HEISENBERG suppone

⁽¹⁾ W. HEISENBERG, “Z. Physik”, 77, 1 (1932); 78, 156 (1933).

pertanto che l'interazione fra i protoni e i neutroni sia qualitativamente simile a quella che effettivamente si esercita fra protoni e atomi neutri di idrogeno e dipenda principalmente da una specie di "energia di scambio". Similmente per ogni coppia di neutroni si introducono forze attrattive del tipo di VAN DER WAALS.

L'uso di tale analogia è difficile a giustificarsi, poiché se il neutrone è realmente composto da un protone e da un elettrone, il modo in cui viene realizzata la loro unione è però affatto inaccessibile alle teorie attuali che porterebbero ad attribuire al neutrone la statistica di BOSE-EINSTEIN e un momento meccanico multiplo intero di $\frac{h}{2\pi}$, contrariamente alle ipotesi fondamentali. Queste sono d'altra parte direttamente appoggiate alle proprietà empiriche dei nuclei e non è possibile rinunziarvi. È pertanto preferibile, allo stato attuale delle nostre conoscenze, tentare di stabilire la legge di interazione fra le particelle elementari in base a soli criteri di semplicità, ma in modo che vengano riprodotte le proprietà più generali e più caratteristiche dei nuclei.

1. Le varie fonti di informazioni che possediamo sulla struttura dei nuclei, come disintegrazioni radioattive, disgregazioni ed eccitazioni artificiali, misure dei difetti di massa, diffusione anomala delle particelle α , e così via, sembrano indicare concordemente che non si può attribuire ai nuclei un'organizzazione fortemente centrale simile a quella degli atomi. Sembra al contrario che i nuclei siano costituiti da una specie di materia estesa e impenetrabile le cui parti agiscono reciprocamente solo per immediato contatto. La differenza fra i nuclei pesanti e quelli leggeri si riduce così essenzialmente al differente contenuto di "materia nucleare". Tale rappresentazione può essere naturalmente valida solo finché la repulsione coulombiana fra i protoni contenuti nei nuclei non ha grande importanza di fronte alle altre forze in gioco; e questo è certamente il caso per i nuclei più leggeri, mentre per i più pesanti bisogna introdurre per questo motivo notevoli correzioni.

Il nostro problema, è dunque di trovare la più semplice legge di interazione fra tutte le particelle elementari, protoni, e neutroni, che conduca, finché è trascurabile la repulsione coulombiana alla definizione di una materia impenetrabile. Assumiamo anzitutto, per semplicità, che fra ogni coppia di protoni agisca soltanto l'ordinaria repulsione elettrostatica, questa ipotesi potendosi in qualche modo appoggiare al fatto che il raggio classico dei protoni è assai piccolo rispetto alle dimensioni nucleari. Le forze elettrostatiche non possono avere, come si è detto, grande influenza sulla struttura dei nuclei leggeri e poiché questi risultano costituiti all'incirca da un numero uguale di protoni e di neutroni, si presenta spontanea l'ipotesi che la causa principale della stabilità nucleare debba risiedere in una particolare azione mutua dei protoni e dei neutroni, mentre in mancanza di sicuri indizi in contrario assumeremo che sia trascurabile l'interazione fra i neutroni.

Il nostro problema è così ridotto alla ricerca di un conveniente accoppiamento fra protoni e neutroni. Per l'apparente analogia, già rilevata, fra la struttura dei nuclei e quella dei corpi solidi o liquidi, può apparire naturale introdurre un'interazione del tipo che in modo affatto generale è realizzato per ogni coppia di atomi o molecole, cioè forze attrattive a grande distanza e intensamente repulsive a piccola distanza in modo che sia assicurata la "impenetrabilità" delle particelle. Oltre a ciò occorrerebbe però assumere anche forze repulsive fra i neutroni, per distanze piccole, per ottenere la desiderata pro-

porzionalità fra il numero delle particelle costituenti e il volume dei nuclei. Una tale soluzione del problema è però insoddisfacente, poiché bisogna ammettere l'esistenza non solo di forze attrattive di origine sconosciuta, ma anche a piccola distanza di forze repulsive aventi un ordine di grandezza eccezionalmente elevato e un'origine altrettanto sconosciuta. Dobbiamo quindi tentare un'altra via per spiegare come la densità nucleare possa essere indipendente dalla massa totale senza che sia impedita la libera mobilità delle particelle elementari mediante un'artificiosa impenetrabilità. Possiamo ricercare, per es., un tipo di accoppiamento siffatto che l'energia media per particella non possa mai superare un limite determinato, comunque grande sia la densità, e ciò in conseguenza di qualche fenomeno di saturazione che potrebbe essere in certo modo analogo alla saturazione delle valenze. Un'interazione di questo tipo ci è data in realtà nello schema di DIRAC dalla seguente espressione, come dimostreremo più avanti:

$$(1) \quad (Q', q' | I | Q'', q'') = -\delta(q' - Q'')\delta(q'' - Q')I(r)$$

in cui si è posto $r = |q' - Q'|$ e Q, q sono le coordinate rispettivamente di un neutrone e di un protone. La funzione $I(r)$ è positiva e decresce rapidamente con la distanza. Per tener conto però della particolare stabilità della particella α assumeremo inoltre che Q e q in (1) rappresentino solo le coordinate dei baricentri con esclusione dello "spin". Si ottiene così che su ogni protone nella particella α agiscono entrambi i neutroni invece di uno solo, e viceversa, poiché possiamo assumere un'autofunzione simmetrica nelle coordinate dei baricentri di tutti i protoni e i neutroni (ciò che vale rigorosamente se si trascura l'energia coulombiana dei protoni). Nella particella α tutti i corpuscoli elementari sono nello stesso stato, così che essa costituisce un "anello chiuso" in un senso più alto che l'atomo di elio. Se si passa dalla particella α a nuclei più complessi, non si può a causa del principio di PAULI aggiungere altre particelle elementari nello stesso stato, e poiché oltre a ciò l'energia di scambio (1)⁽²⁾ è grande in generale solo quando protone e neutrone si trovano in uno stesso stato, bisogna prevedere, ciò che corrisponde esattamente all'esperienza, che l'energia di legame per ogni corpuscolo non possa essere presso i nuclei pesanti essenzialmente più grande che presso la particella α .

Vogliamo ora paragonare l'espressione (1) dell'energia di scambio con quella che si può derivare dal termine di risonanza dell'Hamiltoniana di HEISENBERG⁽²⁾ eliminando l'incomoda coordinata di " ρ -spin", ciò che è possibile se si riguardano, anche formalmente, i protoni e i neutroni come particelle differenti. Si trova allora un'espressione simile a (1) ma con due essenziali differenze. Anzitutto Q e q rappresentano secondo l'espressione di HEISENBERG tutte le coordinate, incluso lo "spin". In secondo luogo HEISENBERG assume per $I(r)$ il segno opposto, ciò che ha particolare importanza per le conseguenze statistiche poiché a causa di ciò i caratteri di simmetria delle autofunzioni risultano secondo la teoria di HEISENBERG tali che non ha luogo alcun fenomeno di saturazione e bisogna ancora introdurre a piccola distanza quelle forze repulsive che ci siamo preoccupati di evitare⁽³⁾.

⁽²⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", 77, 1 (1932).

⁽³⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", 80, 587 (1933)

Vogliamo ora brevemente esaminare l'applicazione, secondo un metodo statistico, della nostra teoria ai nuclei pesanti che sono composti da un numero assai elevato di protoni e di neutroni.

2. - In prima approssimazione consideriamo l'autofunzione di un nucleo come rappresentabile mediante un prodotto di due funzioni che dipendono rispettivamente dalle coordinate di n_1 neutroni e di n_2 protoni:

$$(2) \quad \Psi = \Psi_N(Q_1, \dots, Q_{n_1}; \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n_1}) \Psi_P(q_1, \dots, q_{n_2}; \sigma_1, \dots, \sigma_{n_2})$$

e supponiamo che Ψ_N e Ψ_P siano ottenute mediante antisimmetrizzazione da prodotti di autofunzioni individuali ortogonali:

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi_N = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \sum_R \pm R \Psi_N^1(Q_1, \Sigma_1) \Psi_N^2(Q_2, \Sigma_2) \cdots \Psi_N^{n_1}(Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}), \\ \Psi_P = \frac{1}{\sqrt{n_2!}} \sum_R \pm R \Psi_P^1(q_1, \sigma_1) \Psi_P^2(q_2, \sigma_2) \cdots \Psi_P^{n_2}(q_{n_2}, \sigma_{n_2}). \end{cases}$$

Nel caso di un gran numero di particelle le autofunzioni individuali Ψ si possono naturalmente identificare con pacchetti d'onda rappresentanti particelle libere. L'uso delle autofunzioni di prima approssimazione introduce un certo errore a cause di notevoli effetti di polarizzazione, ma il metodo è certamente utilizzabile per determinazioni d'ordine di grandezza.

Dobbiamo ora calcolare il valore medio dell'energia totale preso sull'autofunzione (2) e ricercare sotto quali condizioni esso diventa minimo. L'energia è composta da tre parti:

$$(4) \quad W = T + E + A$$

essendo T l'energia cinetica, E l'energia elettrostatica dei protoni e A l'energia di scambio.

Assumiamo per semplicità che tutti gli stati individuali definiti nei centri di gravità siano, o liberi, o occupati due volte con opposta direzione dello "spin". Introduciamo ancora le matrici di DIRAC⁽⁴⁾:

$$(5) \quad \begin{cases} (q' | \rho_N | q'') = \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_1} \Psi_N^i(q', \sigma_i) \bar{\Psi}_N^i(q'', \sigma_i), \\ (q' | \rho_P | q'') = \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_2} \Psi_P^i(q', \sigma_i) \bar{\Psi}_P^i(q'', \sigma_i). \end{cases}$$

Valgono le relazioni:

$$(6) \quad \rho_N^2 = 2\rho_N; \quad \rho_P^2 = 2\rho_P$$

(4) P. A. M. DIRAC, "Proc. Cambridge Phil. Soc.", 26, 376 (1930).

in cui il fattore (2) dipende dallo spin. Segue:

$$(7) \quad \rho_N = \begin{matrix} & 2 \\ & \swarrow \\ & 0 \end{matrix} ; \quad \rho_P = \begin{matrix} & 2 \\ & \swarrow \\ & 0 \end{matrix} .$$

Se M è la massa di ogni particella, approssimativamente la stessa per i protoni e per i neutroni, risulta^(*):

$$(8) \quad T = \frac{1}{2M} \text{Spur} [(\rho_N + \rho_P)p^2],$$

$$(9) \quad E = \frac{e^2}{2} \int (q'|\rho_P|q') \frac{1}{|q' - q''|} (q''|\rho_P|q'') dq' dq'' + \dots .$$

Abbiamo trascurato in (9) un termine che rappresenta essenzialmente l'*ordinaria* energia di scambio dipendente dall'interazione elettrostatica dei protoni. Questo termine è stato calcolato da DIRAC⁽⁵⁾ e non ha grande importanza quando il numero delle particelle è grande.

Abbiamo infine:

$$(10) \quad A = - \int (q'|\rho_N|q'') (q''|\rho_N|q') I |q' - q''| dq' dq'' .$$

Quando il numero delle particelle è sufficientemente elevato si possono riguardare ρ_N e ρ_P come matrici quasi diagonali, anzi come funzioni classiche di p e q , e precisamente il migliore legame fra matrici e funzioni classiche ci è dato da⁽⁶⁾(**):

$$(11) \quad \left(q - \frac{v}{2} | \rho | q + \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{h^3} \int \rho(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)} dp,$$

e attraverso la formola che si ottiene rovesciando l'integrale di Fourier. Sostituendo mediante (11) nelle formole precedenti si trova:

$$(12) \quad T = \frac{1}{2M} \int \frac{\rho_N(p, q) + \rho_P(p, q)}{h^3} p^2 dp dq,$$

$$(13) \quad E = \frac{e^2}{2} \int \frac{\rho_N(p, q) \rho_P(p', q')}{h^6} \frac{1}{|q - q'|} dp dq dp' dq',$$

$$(14) \quad A = \int \frac{\rho_N(p, q) V_N(p, q)}{h^3} dp dq = \int \frac{\rho_P(p, q) V_P(p, q)}{h^3} dp dq,$$

(*) Nel testo originale in eq. (8) è mantenuta la dizione tedesca "Spur" per traccia, Tr. (Nota del Curatore.)

⁽⁵⁾ P. A. M. DIRAC, *loc. cit.*

⁽⁶⁾ V., p. es., DIRAC, *loc. cit.*

(**) Ne "La Ricerca Scientifica" è erroneamente stampato V nella parentesi dell'esponentiale. (Nota del Curatore.)

in cui $V_N(p, q)$ e $V_P(p, q)$ sono le funzioni classiche che corrispondono alle matrici:

$$(15) \quad \begin{cases} (q'|V_N|q'') = -(q'|\rho_P|q'')I(|q' - q''|), \\ (q'|V_P|q'') = -(q'|\rho_N|q'')I(|q' - q''|). \end{cases}$$

Assumiamo ora che nell'intorno di ogni punto q siano occupati gli stati di minore energia cinetica, così dai neutroni, come dai protoni. Esisterà allora un valore massimo $P_N(q)$ per i neutroni e analogamente per i protoni, e a causa di (7) sarà:

$$(16) \quad \rho_N(p, q) = \begin{cases} 2 & \text{per } p < P_N(q) \\ 0 & \text{per } p > P_N(q) \end{cases}$$

$$(17) \quad \rho_P(p, q) = \begin{cases} 2 & \text{per } p < P_P(q) \\ 0 & \text{per } p > P_P(q). \end{cases}$$

Consideriamo dapprima il caso limite che la densità sia molto elevata, così che h/P_N e h/P_P , che nell'ordine di grandezza corrispondono alla mutua distanza media delle particelle nel nucleo, siano piccole di fronte al raggio d'azione delle forze di risonanza. Assumiamo ancora che sia $P_N(q) > P_P(q)$, e quindi la densità dei neutroni maggiore di quella dei protoni, e osserviamo che nella seconda delle (15) a causa della pratica diagonalità di ρ_N si può sostituire $I(|q' - q''|)$ con il valore limite $I(0)$, almeno se $I(0)$ è finito; allora quell'equazione si riduce a:

$$(q'|V_P|q'') = -I(0)(q'|\rho_N|q''),$$

da cui segue:

$$(18) \quad V_P(p, q) = -I(0)\rho_N(p, q).$$

Sostituendo con questa nella (14) e tenendo presente che per $\rho_P(p, q) > 0$, è anche sempre $\rho_N = 2$, troviamo:

$$(19) \quad A = -2I(0) \int \frac{\rho_P(p, q)}{h^3} dp dq = -2I(0)n_2.$$

Questo significa che l'energia di legame dipendente dalle forze di risonanza è per ogni protone, nel caso di densità molto alta, semplicemente uguale a $-2I(0)$, purché la densità dei neutroni superi in ogni punto quella dei protoni. Se trascuriamo per un momento la repulsione elettrostatica fra i protoni e fissiamo il rapporto n_2/n_1 , lasciando indeterminata la densità, l'energia potenziale per particella sarà una certa funzione della densità totale:

$$(20) \quad a = a(\mu), \quad \mu = \frac{8\pi}{3h^3} (P_N^3 + P_P^3),$$

che naturalmente per $\mu = 0$ si annulla e per $\mu \rightarrow \infty$ si approssima al valore costante $-\frac{2n_2}{n_1+n_2}I(0)$. Questo valore limite raggiunge il minimo $-I(0)$ quando $n_2 = n_1$. Per medie densità l'espressione generale di $a(\mu)$ risulta a causa di (10) e (11)

$$(21) \quad a = \frac{1}{\mu} \int \frac{\rho_N(p, q) \rho_P(p', q)}{h^6} G(p, p') dp dp'$$

essendo $G(p, p')$ una funzione di $|p - p'|$ connessa nel modo seguente con $I(r)$:

$$(22) \quad G(p, p') = \int e^{-\frac{2\pi i}{h}(p-p', v)} I(|v|) dv.$$

L'energia cinetica per particella avrà la forma

$$(23) \quad t = \kappa \mu^{2/3}$$

e l'energia totale $a + t$ può raggiungere un minimo per un certo valore della densità che dipende solo dal rapporto n_2/n_1 . Si ottiene così una densità costante indipendente della massa del nucleo, e quindi un volume nucleare e un contenuto energetico semplicemente proporzionati al numero delle particelle come richiede l'esperienza.

Si può tentare di determinare la funzione $I(r)$ in modo che i dati sperimentali siano riprodotti con la maggiore esattezza. L'espressione

$$(24) (*) \quad I(r) = \lambda \frac{e^2}{r}$$

p. es., con una costante arbitraria è adatta allo scopo, sebbene essa divenga infinita per $r = 0$. Essa deve essere però modificata per grandi valori di r poiché fornisce una sezione efficace infinita per l'urto fra protone e neutrone; inoltre sembra che conduca a un rapporto troppo piccolo per i difetti di massa della particella α e dell'isotopo dell'idrogeno. Così bisogna utilizzare un'espressione con almeno due costanti arbitrarie, p. es. una funzione esponenziale $I(r) = Ae^{-sr}$. Noi non entreremo però in questa indagine poiché, come si è già rilevato, la prima approssimazione statistica può condurre a errori notevoli comunque grande sia il numero delle particelle. Per nuclei pesanti acquista grande importanza la repulsione coulombiana, ed essa ha per effetto di accrescere alquanto le dimensioni dei nuclei e di rendere variabile dal centro alla periferia la densità, così dei protoni, come dei neutroni. L'energia di legame dovuta alle forze di scambio non dipende ora soltanto dal rapporto n_2/n_1 , ed è, a parità di detto rapporto, alquanto minore che nel caso di nuclei leggeri, a causa della diminuzione di densità dovuta alle forze elettrostatiche.

Lipsia, 11 maggio 1933-XI

(*) Ne "La Ricerca Scientifica" è erroneamente ripetuto (23). (Nota del Curatore.)

Commento alla Nota Scientifica n. 8: "Über die Kerntheorie - Sulla teoria dei nuclei".

È questo il primo e unico articolo di Majorana sulla fisica nucleare⁽¹⁾; esso contiene un modello di forze di scambio fra neutroni (n) e protoni (p) più elegante e del resto più profondo di quello suggerito da Heisenberg nel luglio del 1932 (Z. Phys., 77, 1 (1932)).

Majorana arrivò a Lipsia il 20 gennaio 1933 usufruendo di una borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Nella domanda per la borsa egli aveva affermato di voler studiare "sotto la guida del professor W. Heisenberg la struttura dei nuclei e la formulazione relativistica di una nuova teoria dei quanti". Certamente Heisenberg era allora la migliore e più originale guida allo studio del misterioso mondo nucleare: infatti, meno di quattro mesi dopo la scoperta dei neutroni da parte di Chadwick (Febbraio 1932) Heisenberg aveva inviato alla rivista "Zeitschrift für Physik" un articolo dal titolo "Sulla struttura dei nuclei atomici" che si può considerare come l'inizio della fisica nucleare teorica. Majorana fu uno dei primi fisici a rendersi rapidamente conto dell'importanza di tale articolo.

In esso Heisenberg suggeriva che "i nuclei atomici sono composti di protoni e neutroni, ma non contengono elettroni. Se quest'idea è corretta essa porta a una notevole semplificazione della teoria nucleare". Secondo Heisenberg un nucleo di numero di massa A e di numero di carica Z è composto di Z protoni e $A - Z$ neutroni. Poiché i neutroni hanno una massa dello stesso ordine della massa dei protoni (in effetti lievemente maggiore) i loro moti sono non-relativistici come quelli dei protoni e perciò la meccanica quantistica non-relativistica è valida per tutti i componenti del nucleo senza che occorra invocare la presenza di nessun elettrone. Come scrisse Heisenberg a Bohr il 20 giugno 1932 "l'idea fondamentale [della mia teoria] è di scaricare tutte le difficoltà fondamentali sul neutrone e di trattare in maniera quantomeccanica tutti i componenti del nucleo". Naturalmente questa estensione della validità della meccanica quantistica al nucleo non poteva che fare piacere a Heisenberg.

Il punto di vista di Heisenberg rappresentava una frattura netta con il modello nucleare comunemente accettato all'epoca che supponeva esistessero nel nucleo A protoni e $A - Z$ elettroni. Si noti che i protoni e gli elettroni erano, prima della scoperta del neutrone, le uniche particelle elementari conosciute.

⁽¹⁾ La tesi di laurea di Majorana discussa nel luglio 1929, nonostante il suo titolo "Sulla meccanica dei Nuclei Radioattivi", non riguarda esplicitamente la struttura nucleare ma è uno studio assai interessante della penetrazione quantistica di una barriera di potenziale.

Ci volle un po' di tempo prima che il modello di Heisenberg fosse accettato. Invero più di sei mesi dopo la scoperta sperimentale dei neutroni, Fermi, alla Conferenza Internazionale sull'Elettricità a Parigi (1932), discuteva ancora le difficoltà inerenti all'esistenza di elettroni all'interno dei nuclei. Come spiegava nel suo discorso, il principio d'indeterminazione implicava che gli elettroni, per rimanere confinati entro una sfera del raggio di 10^{-13} cm, dovevano avere un'energia cinetica media di oltre 60 MeV, cioè assai più elevata di quella di qualunque raggio beta conosciuto. Inoltre, secondo il modello nucleare fatto di protoni ed elettroni, il nucleo ^{14}N doveva contenere 14 protoni e 7 elettroni, cioè un numero dispari di fermioni; pertanto, come dimostrato da Ehrenfest e Oppenheimer, il suo spin doveva essere semi-intero e la statistica doveva essere quella di Fermi. Gli esperimenti invece mostravano che lo spin era intero e la statistica quella di Bose. Fermi concludeva *“Ceci semble indiquer encore une fois que les conceptions de la mécanique quantique ordinaire, ne sont pas applicable à l'étude de la dynamique des électrons du noyau atomique”* (Rapport 22, p. 798, alla Conferenza di Parigi del 1932. Il rapporto era stato certamente scritto prima della conferenza, ma il testo pubblicato non contiene nessuna correzione). Anziché rigettare il modello basato su protoni ed elettroni e accettare l'esistenza di una nuova particella elementare neutra, sembra che Fermi fosse pronto ad abbandonare la meccanica quantistica la cui validità, come egli sottolineava, era stata verificata soltanto alla scala atomica ma poteva fallire alla scala nucleare che è 100000 volte più piccola. La relatività e la meccanica quantistica avevano insegnato ai fisici che le leggi della natura possono cambiare quando cambia la scala dei fenomeni: la fisica nucleare insegnerà loro che *“there are more things in heaven and earth, Horatio, than are dreamt of in your philosophy”* (W. Shakespeare, Hamlet, I, 5).

La forza di scambio di Heisenberg era l'unico modello quantomeccanico del nucleo quando Majorana arrivò a Lipsia il 20 gennaio 1933. È lecito domandarsi se egli sia davvero andato a Lipsia con l'idea di studiare sotto la guida del professor Heisenberg, come aveva affermato nella domanda per la borsa di studio, o se non invece sia arrivato con già la propria versione di forze di scambio ben chiara nella sua mente e, anziché la guida del famoso professore, non abbia piuttosto voluto sentire il suo parere sulla versione modificata sviluppata da lui stesso. Per quanto non vi sia traccia negli archivi di Majorana di alcun lavoro, o appunti per un lavoro, sulla struttura dei nuclei fatto a Roma e ispirato dal lavoro di Heisenberg del 1932, la velocità con cui egli completò il suo articolo mi sembra piuttosto favorire la seconda alternativa. In una lettera del 18 febbraio 1933 a suo padre, Majorana afferma di aver già scritto “un articolo sulla struttura dei nuclei che a Heisenberg è piaciuto molto, sebbene contenga qualche correzione alla sua [di Heisenberg] teoria”. L'approvazione di Heisenberg è menzionata nuovamente in una lettera di Majorana alla madre del 22 febbraio in cui scrive “Heisenberg [nel colloquio settimanale] ha parlato della teoria nucleare; ha fatto una grande reclame dell'articolo che ho scritto qui. Ora siamo in rapporti molto amichevoli, grazie a numerose discussioni scientifiche e a qualche partita a scacchi”.

In cosa consistono le correzioni che Majorana fece al modello di Heisenberg? Ambedue sono d'accordo sul fatto che i nuclei siano composti esclusivamente da neutroni e protoni. Inoltre essi suppongono che non vi siano forze n-n o al massimo che esse siano del tutto

trascurabili; le uniche forze p-p sono quelle dovute all'interazione coulombiana e in prima approssimazione possono essere trascurate almeno per nuclei leggeri. Pertanto le uniche forze responsabili della stabilità nucleare sono quelle fra n e p. Per determinare tali forze Heisenberg era partito dall'analogia della coppia (n, p) con lo ione molecolare H_2^+ costituito da un atomo di idrogeno H e da un atomo di idrogeno ionizzato $H^+ = p$. Come era stato dimostrato da Heitler e London, H_2^+ è tenuto insieme dallo scambio di un elettrone

$$(H, H^+) \quad \Leftrightarrow \quad (H^+, H).$$

L'analogia non significa che Heisenberg pensasse che il neutrone sia uno stato legato di un protone e di un elettrone. Egli intendeva semplicemente che la coppia (n, p) fosse tenuta assieme dallo scambio della "carica" che egli definisce come l'autovalore di un operatore ρ^ζ che rappresenta la carica elettrica dove ρ^ζ assume il valore +1 su n e -1 su p. ρ^ζ è la terza componente di un operatore ρ simile all'operatore σ che rappresenta lo spin e che egli chiama spin- ρ e che noi chiamiamo isospin e che denotiamo con τ . I neutroni e i protoni possono dunque venir considerati come due stati diversi di una singola particella che oggi chiamiamo nucleone. Come Heisenberg dice "ogni particella in un nucleo è caratterizzata da cinque grandezze, le tre coordinate di posizione (x, y, z), lo spin σ_z lungo l'asse z e un quinto numero ρ^ζ che può valere ± 1 ".

Nel suo discorso alla Conferenza Solvay sulla Fisica Nucleare a Brussels (ottobre 1933) Heisenberg rappresentò graficamente l'operatore di scambio carica P_c fra n e p con il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & P_c & x_1 & x_2 \\ \leftarrow \bullet & \circ \rightarrow & \Leftrightarrow & \leftarrow \circ & \bullet \rightarrow, \end{array}$$

dove \bullet rappresenta un protone a x_1 e \circ un neutrone a x_2 ; le frecce rappresentano l'orientamento degli spin. L'operatore P_c inverte il segno dell'autovalore di ρ^ζ ma non quello dell'operatore di spin.

Per Majorana invece l'analogia della coppia (n, p) con H_2^+ è di dubbio significato probabilmente poiché egli pensava che l'analogia implicasse necessariamente che il neutrone sia una particella composta, $n = (p, e)$. Inoltre non gli piaceva il concetto astratto di carica introdotto da Heisenberg come l'autovalore di ρ^ζ che considerava "incomodo" (in tedesco: *unbequem*) e insisteva nel trattare n e p come particelle diverse. Sugeriva che la forza n-p sia dovuta allo scambio, rappresentato da un operatore P_x , delle coordinate spaziali x_1, x_2 :

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & P_x & x_1 & x_2 \\ \leftarrow \bullet & \circ \rightarrow & \Leftrightarrow & \circ \rightarrow & \leftarrow \bullet. \end{array}$$

A causa di qualche “fenomeno di saturazione” questa forza di scambio conduce all’indipendenza della densità nucleare dalla massa totale. Si verifica facilmente che gli operatori di scambio di Majorana e di Heisenberg sono legati dalla relazione

$$P_x = P_s P_c,$$

dove P_s è l’operatore che inverte il segno dello spin ordinario. Lo scambio delle coordinate spaziali è dunque equivalente allo scambio delle coordinate di spin e di ρ -spin. Lo scambio di Majorana impedisce il collasso del nucleo senza la necessità di introdurre alcuna forza repulsiva a breve distanza come voleva Heisenberg purché si inverte però il segno della funzione potenziale di Heisenberg $J(r)$.

Majorana giustifica il suo modello di forze di scambio rispetto a quello di Heisenberg osservando che esso è compatibile con la costanza della densità nucleare e che assicura la “particolare stabilità della particella α ” prodotta da “un fenomeno di saturazione più o meno analogo alla saturazione delle valenze”. In effetti nella particella α “tutti e due i neutroni agiscono su ciascun protone invece che su uno solo [come nel modello di Heisenberg] poiché possiamo supporre che la funzione delle coordinate spaziali di tutti i neutroni e i protoni sia simmetrica (cosa che è vera se si trascura l’energia coulombiana dei protoni). Nella particella α tutte le quattro particelle sono nello stesso stato che è perciò un guscio chiuso” (nel testo tedesco: “so das es eine abgeschlossene Schale in höhere Sinne as das Heliumatom ist”; *abgeschlossene Schale* significa, nel linguaggio di spin e di spin-isotopico, che il guscio è chiuso quando sia lo spin che l’isospin sono in stati antisimmetrici).

Fu questa saturazione delle forze nucleari a $A = 4$ che convinse immediatamente Heisenberg della superiorità del modello di Majorana rispetto al suo di modello. Il discorso di Heisenberg alla Conferenza Solvay nell’ottobre del 1933 rappresentò la migliore consacrazione del lavoro del suo giovane collega.

Nei loro articoli, Heisenberg e Majorana, discutevano soltanto la stabilità dei nuclei, cioè degli effetti di quelle che oggi chiamiamo interazioni forti. Pertanto essi non risolsero il mistero dell’origine dei raggi beta, cioè degli elettroni emessi dai nuclei radioattivi. Il problema fu risolto da Fermi nel suo celebre lavoro del 1934 (“Z. Phys.” 88, 161 (1934)) che segna l’inizio della teoria delle interazioni deboli.

Dopo il 1933 lo studio delle forze nucleari fece rapidi progressi. Si scoprirono rapidamente le forze n-n che risultarono essere uguali a quelle n-p e a quelle p-p a parte le interazioni coulombiane. Si scoprì così l’indipendenza delle interazioni forti dalla carica e, con buona pace di Majorana, il formalismo di Heisenberg dell’isospin fu riconosciuto essere il vero modo di esprimere questa importante proprietà delle interazioni forti.

Nel 1937 Wigner osservò che una combinazione di forze di Majorana e di forze dipendenti soltanto dalla distanza (che oggi chiamiamo forze di Wigner) sono invarianti non solo rispetto allo spin e isospin, ma anche rispetto a un gruppo più grande $SU(4)$. È questa la cosiddetta teoria dei super-multipletti che conduce a una degenerazione dei livelli nucleari, e che è più o meno in accordo con i dati empirici dei nuclei leggeri.

Dopo questo lavoro del 1933, Majorana sembra aver perso interesse nella fisica nucleare o addirittura per tutta la fisica forse a causa della sua cattiva salute.

* * *

Voglio ringraziare sentitamente Nadia ROBOTTI e Francesco GUERRA per le molte e illuminanti discussioni e per avermi permesso di leggere (e di fare ampio uso di) una versione preliminare di un lavoro storico sui primi sviluppi della fisica nucleare a Roma.

L. A. RADICATI di BROZOLO
Scuola Normale Superiore, Pisa

On nuclear theory^(*)

ETTORE MAJORANA

Summary. — We discuss a new interpretation of HEISENBERG's nuclear theory which leads to a slightly different Hamiltonian function. Accordingly we treat the nuclei statistically.

The discovery of the neutron, a heavy and uncharged elementary particle, made it possible to develop a nuclear theory using ideas of quantum mechanics without, however, removing the fundamental difficulties that are connected with β -decay. According to HEISENBERG⁽¹⁾, we can think of nuclei for many purposes as consisting of protons and neutrons, *i.e.* of particles of almost the same mass, with spin $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ and obeying FERMI statistics. The problem is thus reduced to finding a suitable Hamiltonian which holds for this system of particles, and we need a non-relativistic approximation since the speed of the particles is presumably rather small compared with the speed of light ($v \sim \frac{c}{10}$). In order to find a suitable interaction between the components of the nuclei HEISENBERG was guided by an obvious analogy. He treats the neutron as a combination of a proton and an electron, *i.e.* like a hydrogen atom bound by a process not fully understood by present theories, in such a way that it changes its statistical properties and its spin. He further assumes that there are exchange forces between protons and neutrons similar to those responsible for the molecular binding of H and H⁺. In addition to this interaction

(*) Translated from "Zeitschrift für Physik", Bd. 82, 1933, pp. 137-145, by Verena Wehrli-Brink. (Courtesy of D. M. Brink.)

⁽¹⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", 77, 1 (1932); 78, 156 (1933).

between protons and neutrons considered essential for the stability of the nucleus there are COULOMB repulsion between protons, VAN DER WAALS attraction between neutrons and some sort of electrostatic interaction between protons and neutrons⁽²⁾.

One may doubt the validity of this analogy as the theory does not explain the inner structure of the neutron, and the interaction between neutron and proton seems rather big compared with the mass-defect of the neutron as determined by CHADWICK. We think, therefore, that it may be quite interesting to find a Hamiltonian very similar to HEISENBERG's which represents in the simplest way the most general and most obvious properties of the nucleus. We shall use a statistical method which should be permissible for determining orders of magnitude. We should also like to point out the exchange forces must have the opposite sign to HEISENBERG's forces because of the criterium we fixed for the Hamiltonian. Therefore, the symmetry characteristics of the eigenfunctions belonging to the normal state and the whole statistical treatment are different from HEISENBERG's.

1. The numerous sources of information we have on nuclear structure, *i.e.* radioactive decay, artificial decay, anomalous scattering of α -particles, mass-defect measurements etc. seem to indicate that nuclei, unlike atoms, are not uniformly organized. On the contrary, it looks as though nuclei consist of rather independent components which react only on immediate contact, *i.e.* of some sort of matter with the same properties of size and impenetrability as macroscopic matter. Light and heavy nuclei are built up of this matter and the difference between them depends mainly on their different content of "nuclear matter". This theory can only be correct if the COULOMB repulsion between the positive components of nuclei is not very important. This certainly holds for rather light nuclei, whereas we have to have a slight correction for heavy nuclei.

If we assume that nuclei consist of protons and neutrons we have to formulate the simplest law of interaction between them which will lead if the electrostatic repulsion is negligible, to a constant density for nuclear matter. We have to find three laws of interaction: One between protons, one between protons and neutrons and one between neutrons. We shall assume, however, that only COULOMB's force acts between each pair of protons. This can be justified to a certain extent by the fact that the classical radius of protons is much smaller than the average distance between the particles in the nucleus. Also, the COULOMB force is not very important for light nuclei and, as they contain almost the same number of neutrons and protons, it seems reasonable to think that a special interaction between protons and neutrons is the main cause of nuclear stability. We assume that there is no noticeable interaction between the neutrons for there is no proof of the contrary. We now have to find a suitable interaction between protons and neutrons. Nuclear structure and the structure of solids and liquids seem to be somewhat similar and it might be possible to have an interaction of the same type as between atoms and molecules, *i.e.* attraction for large distances and strong repulsion for small distances

⁽²⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", 80, 587 (1933).

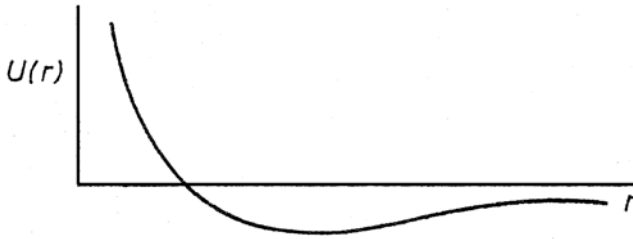


Fig. 1. – Potential energy between two atoms.

so that the particles do not penetrate each other (see Fig. 1). We would also have to assume repulsive forces between neutrons with small separations in order to obtain the desired ratio between the number of particles and the nuclear volume. Such a solution would be aesthetically unsatisfactory, however, since we would have not only attractive forces of unknown origin between the particles, but also, for short distances, repulsive forces of enormous magnitude corresponding to a potential of several million volts. We shall, therefore, try to find another solution and introduce as few arbitrary elements as possible. The main problem is this: How can we obtain a density independent of the nuclear mass without obstructing the free movement of the particles by an artificial impenetrability? We must try to find an interaction whose average energy per particle never exceeds a certain limit however great the density. This might occur through a sort of saturation phenomenon more or less analogous to valence saturation. Such an interaction is given, as we shall prove, by

$$(1) \quad (Q', q' | J | Q'', q'') = -\delta(q' - Q'')\delta(q'' - Q')J(r),$$

where $r = |q' - Q'|$ and Q and q are the coordinates of a neutron and proton, respectively. The function $J(r)$ is positive, and a possible form of it is shown in Fig. 2. Expression (1) implies that there is an attraction or a repulsion respectively between the neutron and the proton depending on whether the wave-function is approximately symmetrical or anti-symmetrical in the two particles. In order to account for the special stability of the α -particle we shall assume that Q and q in equation (1) are only the position coordinates

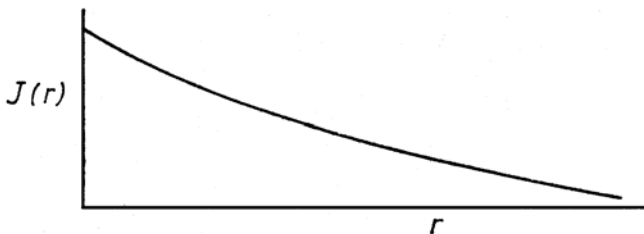


Fig. 2. – Curve of the resonance forces.

without spin. Thus we find that both neutrons act on each proton in the α -particle instead of only one and vice versa, since we assume a symmetrical function in the position coordinates of all protons and neutrons (which is true only if we neglect the COULOMB energy of the protons). In the α -particle all four particles are in the same state so that it is a closed shell. If we proceed from an α -particle to heavier nuclei we can have no more particles in the same state because of the PAULI principle. Also, the exchange energy (1) is usually large only if a proton and a neutron are in the same state and we may expect, which agrees with experiments, that in heavy nuclei the mass defect per particle is not noticeably bigger than in the α -particle.

Let us now compare expression (1) for the interaction between a proton and a neutron with the interaction deduced from the resonance term of HEISENBERG's Hamiltonian by distinguishing between neutrons and protons and by eliminating the troublesome ρ -spin-coordinate.

We find an expression similar to (1) which is, however, fundamentally different in two respects: Firstly, in HEISENBERG's expression Q and q stand for all coordinates including the spin. Secondly, HEISENBERG assumes the opposite sign for the resonance forces. Statistically this is most important as there is no saturation because of the symmetry character of HEISENBERG's eigenfunctions and repulsive interactions at short distances are necessary⁽³⁾. We shall now investigate the saturation that leads to the uniform density of the nuclear components found experimentally.

2. In a first approximation we take the eigenfunction of the nucleus as a product of two functions which depend on the coordinates of the n_1 neutrons and n_2 protons respectively:

$$(2) \quad \psi = \psi_N(Q_1, \Sigma_1, \dots, Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}) \psi_P(q_1, \sigma_1, \dots, q_{n_2}, \sigma_{n_2})$$

and we assume that ψ_N and ψ_P can be obtained by anti-symmetrizing products of individual orthogonal single-particle eigenfunctions:

$$(3) \quad \begin{cases} \psi_N = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \sum_R \pm R \psi'_N(Q_1, \Sigma_1) \cdots \psi_N^{n_1}(Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}), \\ \psi_P = \frac{1}{\sqrt{n_2!}} \sum_R \pm R \psi'_P(q_1, \sigma_1) \cdots \psi_P^{n_2}(q_{n_2}, \sigma_{n_2}). \end{cases}$$

For many particles the individual-particle wave-function ψ may be identified with free-particle wave-packets. We can show that each proton is subject on the average to the interaction of a small number (one or two) of neutrons and vice versa, and the assumption of free-particle wave-functions introduces a slight error because of polarization effects. This method is, suitable for order-of-magnitude calculations.

⁽³⁾ W. HEISENBERG, "Z. Physik", 80, 587 (1933). I would like to thank Professor HEISENBERG very much for being able to see his paper before it was published.

We have to calculate the mean value of the total energy using the wave-function (2) and find its minimum. This energy consists of three parts:

$$(4) \quad W = T + E + A,$$

where T is the kinetic energy, E the electrostatic energy of the protons and A the exchange energy. We assume that all individual particle states are either free or occupied twice with opposite spin direction. Then, n_1 and n_2 are even. We also introduce DIRAC's density matrices:

$$(5) \quad \begin{cases} (q'|\rho_N|q'') = \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_1} \psi_N^i(q', \sigma_i) \bar{\psi}_N^i(q'', \sigma_i), \\ (q'|\rho_P|q'') = \sum_{\sigma_i=1}^2 \sum_{i=1}^{n_2} \psi_P^i(q', \sigma_i) \bar{\psi}_P^i(q'', \sigma_i). \end{cases}$$

and have

$$(6) \quad \rho_N^2 = 2\rho_N, \quad \rho_P^2 = 2\rho_P,$$

where the factor 2 comes from the spin. The eigenvalues of the density matrices are

$$(7) \quad \rho_N = \begin{matrix} 2 \\ \diagdown \\ 0 \end{matrix}, \quad \rho_P = \begin{matrix} 2 \\ \diagdown \\ 0 \end{matrix}.$$

If the mass M of each particle is approximately the same for neutrons and protons we obtain

$$(8) \quad T = \frac{1}{2M} \text{Tr} [(\rho_N + \rho_P)p^2],$$

$$(9) \quad E = \frac{e^2}{2} \int (q'|\rho_P|q') \frac{1}{|q' - q''|} (q''|\rho_P|q'') dq' dq'' + \dots$$

In equation (9) we have left out a term which is essentially the COULOMB exchange energy of the protons. This term has been calculated by DIRAC⁽⁴⁾ and is not very important when there are many particles. Finally we obtain:

$$(10) \quad A = - \int (q'|\rho_N|q'') J|q' - q''| (q''|\rho_P|q') dq' dq''.$$

(4) P. A. M. DIRAC, "Proc. Cambridge Phil. Soc.", 26, 376 (1930).

If the number of particles is large ρ_N and ρ_P are almost diagonal matrices and even classical functions of p and q ⁽⁵⁾. The best relation between the matrices and the classical functions is given by

$$(11) \quad \begin{cases} \left(q - \frac{v}{2} | \rho_N | q + \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{h^3} \int \rho_N(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)} dp, \\ \left(q - \frac{v}{2} | \rho_P | q + \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{h^3} \int \rho_P(p, q) e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)} dq \end{cases}$$

and by an inversion of the FOURIER integrals. If we put equation (11) in the above expression we obtain

$$(12) \quad T = \frac{1}{2M} \int \frac{\rho_N(p, q) + \rho_P(p, q)}{h^3} p^2 dp dq,$$

$$(13) \quad E = \frac{e^2}{2} \int \frac{\rho_N(p, q) \rho_P(p', q')}{h^6} \frac{1}{|q - q'|} dp dq dp' dq',$$

$$(14) \quad A = \int \frac{\rho_N(p, q) V_N(p, q)}{h^3} dp dq = \int \frac{\rho_P(p, q) V_P(p, q)}{h^3} dp dq,$$

where $V_N(p, q)$ and $V_P(p, q)$ are the classical functions corresponding to the matrices

$$(15) \quad \begin{cases} (q' | V_N | q'') = -(q' | \rho_P | q'') J |q' - q''|, \\ (q' | V_P | q'') = -(q' | \rho_N | q'') J |q' - q''|. \end{cases}$$

We now assume that near a point q the states of low energy are occupied by neutrons as well as by protons. There will be a maximum value of the momentum $P_N(q)$ for the neutrons and the protons, and from equation (7) it follows that

$$(16) \quad \rho_N(p, q) = \begin{cases} 2, & \text{if } p < P_N(q), \\ 0, & \text{if } p > P_N(q), \end{cases}$$

$$(17) \quad \rho_P(p, q) = \begin{cases} 2, & \text{if } p < P_P(q), \\ 0, & \text{if } p > P_P(q). \end{cases}$$

We first investigate a limiting case, *i.e.* a case of very high density when h/p_N and h/p_P , which are of the order of magnitude of the mutual distance between the particles in the nucleus, are small compared with the range of the resonance forces. We also assume that $P_N > P_P$, *i.e.* that the density of the neutrons is larger than the density of the protons.

⁽⁵⁾ See, P. A. M. DIRAC, *ibidem*.

We note that in the second equation of (15) ρ_N is almost diagonal and $J|q' - q''|$ can be substituted by $J(0)$ if $J(0)$ is finite. The equation then reads

$$(q'|V_P|q'') = -J(0)(q'|\rho_N|q''),$$

and from this follows

$$(18) \quad V_P(p, q) = -J(0)\rho_N(p, q).$$

We put this in equation (14) and note that $\rho_N = 2$ if $\rho_P(p, q) > 0$ and obtain

$$(19) \quad A = -2J(0) \int \frac{\rho_P(p, q)}{h^3} dp dq = -2J(0)n_2.$$

This means that the binding energy per proton due to the exchange forces is only $-2J(0)$ if the particle density is high and the density of neutrons larger than that of protons. We neglect for the time being the COULOMB repulsion of the protons (which is approximately true for light nuclei) and fix the ratio n_1/n_2 , but not the density. Then the potential energy per particle is a certain function of the total density

$$(20) \quad a = a(\mu), \quad \mu = \frac{8\pi}{3h^3}(P_N^3 + P_P^3).$$

This vanishes for $\mu = 0$ and approaches a constant value $-\frac{2n_2}{n_1+n_2}J(0)$ for $\mu \rightarrow \infty$. This limiting value will reach the minimum $-J(0)$ if $n_1 = n_2$. For intermediate densities the general expression of $a(\mu)$ follows from equations (10) and (11) and is

$$(21) \quad a = \frac{1}{\mu(q)} \iint \frac{\rho_N(p, q)\rho_P(p', q)}{h^6} G(p, p') dp dp',$$

where $G(p, p')$ is a function of $|p - p'|$ which depends on $J(r)$ in the following way

$$(22) \quad G(p, p') = \int e^{-\frac{2\pi i}{h}(p-p', v)} J|v| dv.$$

The kinetic energy per particle is

$$t = \kappa\mu^{2/3}$$

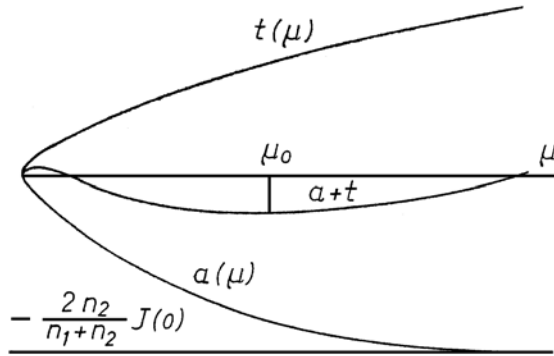


Fig. 3. – Kinetic and potential energy per particle.

and the total energy $a + t$ reaches a minimum for a certain value dependent only on the ratio n_1/n_2 (Fig. 3). We obtain a constant density independent of the nuclear mass and thus a nuclear volume and binding energy proportional only to the number of particles, as is found by experiment. We can try to determine the function $J(r)$ in a way that best represents the experimental results. The expression

$$J(r) = \lambda \frac{e^2}{r},$$

for instance, with an arbitrary constant is suitable even though it becomes infinite if $r = 0$. For great distances, however, it must be modified as it gives an infinite cross section for the collision between protons and neutrons. Also, it seems to provide too small a ratio for the mass defects of the α -particle and the hydrogen isotope. Thus, we have to use an expression with at least two constants, *e.g.* an exponential function, $J(r) = Ae^{-\beta r}$. We shall not follow this up since it has been shown that the first statistical approximation can lead to considerable errors however large the number of particles. For heavy nuclei COULOMB's force is very important which means that the nuclear extension increases slightly and the density of neutrons and protons is no longer constant locally. The exchange binding energy not only depends on the ratio n_1/n_2 , it is even slightly smaller than for light nuclei because of the smaller density caused by COULOMB forces.

* * *

I would like to thank Professor HEISENBERG very much for his advice and numerous discussions. My thanks are due to Professor EHRENFEST for many valuable discussions and also to the Consiglio Nazionale delle Ricerche for making my stay in Leipzig possible.

Comment on the Scientific Paper no. 8: "On nuclear theory".

This is Majorana's first and only article on nuclear physics⁽¹⁾; it contains a version of exchange forces between neutrons (n) and protons (p) more elegant and deeper than the one suggested by Heisenberg in July 1932 (*Z. Phys.*, 77, 1 (1932)).

Majorana arrived in Leipzig on January 20, 1933, with a research grant from the Italian "Consiglio Nazionale delle Ricerche". In the application for the grant he had stated that his plan was to study "under the guidance of Professor W. Heisenberg the structure of nuclei and the relativistic formulation of the new quantum theory". Surely Heisenberg was at that time the best and most original guide to the mysterious world of nuclear structure. Indeed less than four months after Chadwick's discovery of neutrons (February 1932) Heisenberg had sent to "Zeitschrift für Physik" an article "On the Structure of Atomic Nuclei" which marked the beginning of nuclear theory. Majorana was one of the first physicists to quickly realize its importance.

In that paper Heisenberg suggested that "atomic nuclei are composed of protons and neutrons but do not contain electrons. If this is correct it means a very considerable simplification of nuclear theory". According to Heisenberg a nucleus with mass number A and charge number Z is made up of Z protons and $A-Z$ neutrons. Since neutrons have a mass of the same order as that of the protons (actually a little larger) their motions would be non-relativistic as that of the protons. Hence quantum mechanics would hold for all the components of the nucleus without the need of any electrons. As Heisenberg wrote to Bohr on June 20, 1932 "the basic idea [of my theory] is to shove all fundamental difficulties onto the neutron and to do quantum mechanics in the nucleus". Obviously this was much to Heisenberg's satisfaction.

Heisenberg's point of view represented a profound departure from the traditional nuclear model which was supposed to contain A protons and $A-Z$ electrons. Protons and electrons were, before the discovery of the neutron, the only known elementary particles.

Heisenberg's model took some time to be accepted. Indeed more than six months after the experimental discovery of neutrons, Fermi, at the International Conference on Electricity in Paris (1932), was still discussing in details the difficulties posed by the existence of electrons inside the nuclei. As he explained in his talk, the uncertainty prin-

⁽¹⁾ Majorana's unpublished doctoral dissertation (discussed in July 1929), in spite of its title "Sulla meccanica dei Nuclei Radioattivi" ("On the mechanics of the radioactive nuclei") does not really concern nuclear structure. It is an interesting study of the quantum potential barrier.

ciple implied that electrons confined within a sphere of radius 10^{-13} cm would have an average kinetic energy of more than 60 MeV, much higher than that of any known β -ray. Moreover, according to the proton-electron model the nucleus ^{14}N was supposed to contain 14 protons and 7 electrons, *i.e.* an odd number of fermions; therefore, as proved by Ehrenfest and Oppenheimer, its spin should have been half-integer and the nucleus should have followed Fermi's statistics. Experiment instead showed that the spin was integer and the statistics was that of Bose. Fermi concluded: "*Ceci semble indiquer encore une fois que les conceptions de la mécanique quantique ordinaire, ne sont pas applicable à l'étude de la dynamique des électrons du noyau atomique*" (Rapport 22, p. 798, at the Paris Conference, 1932). The report was certainly written before the conference, but in the published text there was no correction). Rather than discarding the proton-electron model and accepting the existence of a new neutral elementary particle, Fermi seems to have been ready to give up quantum mechanics whose validity, he emphasized, had only been tested at the atomic scale but might well fail at the nuclear scale which is 100000 times smaller. Relativity and quantum mechanics had taught physicists that the laws of physics may change when the scale of phenomena changes: nuclear physics was going to teach them that "there are more things in heaven and earth, Horatio, than are dreamt of in your philosophy" (W. Shakespeare, Hamlet, I, 5).

Heisenberg's charge exchange force was the only purely quantum-mechanical model of the nucleus when Majorana arrived in Leipzig on January 20, 1933. Did he really go there to study the structure of nuclei under the guidance of Professor Heisenberg, as he had stated in the application for the research grant, or did he arrive there with his own version of exchange forces in mind and, rather than guidance, did he only want to ask the famous Professor his opinion on ideas that he, Majorana, had already developed? There is no record in Majorana's archives of any work on nuclear structure that he might have done in Rome inspired by Heisenberg's 1932 paper. However, the speed with which Majorana completed his paper seems to me to favour the second alternative. In a letter of February 18, 1933, to his father, Majorana states that he had already written "an article on the structure of nuclei that Heisenberg liked very much, even though it contains some corrections to his [Heisenberg's] theory". Heisenberg's approval of the paper is mentioned again in a letter to his mother of February 22: "Heisenberg has spoken [in the weekly colloquium] of nuclear theory: he did a lot of advertising for a paper I have written here. We are now on friendly terms, thanks to many scientific discussions and some chess games".

What are the corrections that Majorana made to Heisenberg's model? Both agree that nuclei are composed exclusively of neutrons and protons. They assume that there are no n-n forces or at most they are negligible; p-p forces are only due to Coulomb interactions and can be neglected in a first approximation at least for light nuclei. Hence the only forces responsible for nuclear stability are those between n and p. To determine these forces, Heisenberg started from the analogy of the (n, p) pair with the molecular ion H_2^+ made up of a hydrogen atom H and a ionized hydrogen $\text{H}^+ = \text{p}$. As Heitler and London had proved, H_2^+ is held together by the exchange of an electron

$$(H, H^+) \Leftrightarrow (H^+, H).$$

The analogy does not mean that Heisenberg thought that the neutron is a bound state of a proton and an electron. He simply meant that the pair (n, p) is held together by the exchange of “charge” which he defines as the eigenvalue of an operator ρ^ζ representing the electric charge, where ρ^ζ takes the value +1 on n and -1 on p. ρ^ζ is the third component of a spin-like operator ρ that he calls ρ -spin, which we now call isospin and denote by τ . Neutrons and protons are thus to be thought of as two different states of one single particle that we now call nucleon. As Heisenberg says “each particle in a nucleus is characterised by 5 quantities: the three position coordinates (x, y, z), the spin σ_z along the z -axis and a fifth number ρ^ζ which can be ± 1 ”.

In his rapporteur talk at the Solvay Conference on Nuclear Physics in Brussels (October 1933) Heisenberg represented graphically the charge exchange operator P_c between n and p with the following diagram

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & P_c & x_1 & x_2 \\ \leftarrow \bullet & \circ \rightarrow & \Leftrightarrow & \leftarrow \circ & \bullet \rightarrow, \end{array}$$

where \bullet represents a proton at x_1 and \circ a neutron at x_2 ; the arrows represent the orientation of the spins. The operator P_c reverses the sign of the eigenvalue of ρ^ζ but not that of the spin operator.

Majorana instead considered the analogy of the pair (n, p) with H_2^+ of dubious significance probably because he thought it implied necessarily that the neutron is a composite particle, $n = (p, e)$. Moreover, he disliked Heisenberg’s abstract conception of charge as the eigenvalue of ρ^ζ which he termed “troublesome” (German: *umbequem*; Italian: *incomodo*) and insisted in treating n and p as different particles. He suggested that the n-p force is due to the exchange of the space coordinates x_1, x_2 , represented by an operator P_x :

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & P_x & x_1 & x_2 \\ \leftarrow \bullet & \circ \rightarrow & \Leftrightarrow & \circ \rightarrow & \leftarrow \bullet. \end{array}$$

Owing to some “saturation phenomenon”, this exchange force leads to the independence of nuclear density of the total mass. One easily verifies that Majorana and Heisenberg’s exchange are related by

$$P_x = P_s P_c,$$

where P_s is the operator that reverses the sign of the ordinary spin. Thus the exchange of space coordinates is equivalent to exchanging spin and ρ -spin coordinates. Majorana’s exchange prevents the collapse of the nucleus without the need of any repulsive force at short distance provided one inverts the sign of Heisenberg’s potential function $J(r)$.

Majorana motivates his own model of exchange forces in preference to Heisenberg’s one by noticing that it is compatible with the constancy of the nuclear density and that it ensures the “particular stability of the α -particle” arising from a “saturation phenomenon more or less analogous to valence saturation”. Indeed in the α -particle “both neutrons

act on each proton instead of only one [as in Heisenberg's model] and vice-versa since we can assume a symmetrical function in the position coordinates of all protons and neutrons (which is true if we neglect the Coulomb energy of the protons). In the α -particle all four particles are in the same state so that it is a closed shell" (German: "*so das es eine abgeschlossene Schale in höhere Sinne as das Heliumatom ist*"; *abgeschlossene Schale* means in the language of spin and isospin that the shell is closed when both spin and isospin functions are anti-symmetrical).

It was this saturation of nuclear forces at $A = 4$ that immediately convinced Heisenberg that Majorana's model was preferable to his own. Heisenberg's talk at the Solvay Conference on nuclei in October 1933 was the best advertisement for the work of his younger colleague.

In their papers Heisenberg and Majorana were only concerned with nuclear stability, *i.e.* with what we now call strong interactions. Therefore they did not solve the mystery of the origin of β -rays, *i.e.* of the origin of the electron emitted by radioactive nuclei. The problem was finally solved by Fermi in his celebrated 1934 article (Z. Phys. 88, 161 (1934)) which marks the beginning of the theory of weak interactions.

After 1933 the study of nuclear forces advanced very rapidly. The n-n forces were soon found to be equal to the n-p forces and to the p-p forces, apart from the Coulomb interaction. The charge independence of the strong interactions was thus established, and Heisenberg's isospin formalism was recognised (*pace* to Majorana) to be the correct way to describe it.

In 1937 Wigner noticed that a combination of Majorana forces with his own forces (that depend only upon the space distance) are not only spin and isospin independent but are invariant under a larger symmetry group, $SU(4)$. This is the so-called supermultiplets theory which leads to a degeneracy of nuclear levels in very rough agreement with empirical evidence for light nuclei.

After his 1933 paper Majorana seems to have lost interest in nuclear physics or in physics all together, perhaps owing to poor health.

* * *

I wish to thank Nadia ROBOTTI and Francesco GUERRA for many enlightening discussions and for letting me read (and make ample use of) the preliminary version of a historical paper on the early developments of nuclear physics in Rome.

L. A. RADICATI DI BROZOLO
Scuola Normale Superiore, Pisa

Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Il Nuovo Cimento”, vol. 14, 1937, pp. 171-184.

Sunto. — Si dimostra la possibilità di pervenire a una piena simmetrizzazione formale della teoria quantistica dell'elettrone e del positrone facendo uso di un nuovo processo di quantizzazione. Il significato delle equazioni di DIRAC ne risulta alquanto modificato e non vi è più luogo a parlare di stati di energia negativa; né a presumere per ogni altro tipo di particelle, particolarmente neutre, l'esistenza di “antiparticelle” corrispondenti ai “vuoti” di energia negativa.

L'interpretazione dei cosiddetti “stati di energia negativa” proposta da DIRAC⁽¹⁾ conduce, come è ben noto, a una descrizione sostanzialmente simmetrica degli elettroni e dei positroni. La sostanziale simmetria del formalismo consiste precisamente in questo, che fin dove è possibile applicare la teoria girando le difficoltà di convergenza, essa fornisce realmente risultati del tutto simmetrici. Tuttavia gli artifici suggeriti per dare alla teoria una forma simmetrica che si accordi con il suo contenuto, non sono del tutto soddisfacenti; sia perché si parte sempre da una impostazione asimmetrica, sia perché la simmetrizzazione viene in seguito ottenuta mediante tali procedimenti (come la cancellazione di costanti infinite) che possibilmente dovrebbero evitarsi. Perciò abbiamo tentato una nuova via che conduce più direttamente alla meta.

⁽¹⁾ P. A. M. DIRAC, “Proc. Camb. Phil. Soc.”, 30, 150 (1924). V. anche W. HEISENBERG, “Z. Physik”, 90, 209 (1934).

Per quanto riguarda gli elettroni e i positroni, da essa si può veramente attendere soltanto un progresso formale; ma ci sembra importante, per le possibili estensioni analogiche, che venga a cadere la nozione stessa di stato di energia negativa. Vedremo infatti che è perfettamente possibile costruire, nella maniera più naturale, una teoria delle particelle neutre elementari senza stati negativi.

1. L'elettrodinamica quantistica si può dedurre, come si sa, mediante un processo di quantizzazione da un sistema di equazioni che comprende, da una parte, le equazioni d'onda dell'elettrone di DIRAC, dall'altra le equazioni di MAXWELL in cui le densità di carica e di corrente sono rappresentate da certe espressioni formate mediante la funzione d'onda elettronica. La forma che si dà a queste espressioni aggiunge in realtà qualcosa di nuovo alle equazioni di Dirac e soltanto da essa può derivare quella asimmetria rispetto al segno della carica che nelle equazioni di Dirac non esiste. Ma poiché tali espressioni risultano automaticamente dall'applicazione di un principio variazionale da cui si deducono insieme le equazioni di Maxwell e quelle di Dirac, il nostro problema sarà dunque di esaminare il fondamento di questo principio e la possibilità di sostituirlo con altro più appropriato.

Le grandezze che figurano nelle equazioni di Maxwell-Dirac sono notoriamente di due specie: da una parte si hanno i potenziali elettromagnetici, suscettibili entro i limiti del principio di corrispondenza di interpretazione classica, dall'altra le onde materiali che rappresentano particelle obbedienti alla statistica di FERMI e che hanno significato solo come grandezze quantistiche. In queste condizioni appare poco soddisfacente che le equazioni e tutto il processo di quantizzazione si facciano dipendere da un principio variazionale che è soltanto suscettibile di interpretazione classica. Sembra più naturale il cercare una generalizzazione dei metodi variazionali tale che le variabili le quali figurano nella funzione Lagrangiana abbiano, come è desiderabile, fin dal principio il loro significato finale; e rappresentino quindi delle grandezze non necessariamente commutabili. È questa appunto la via che seguiremo. Essa ha importanza sopra tutto per i campi legati alla statistica di Fermi, mentre per quanto riguarda il campo elettromagnetico ragioni di semplicità possono far presumere che nulla sia da aggiungere ai vecchi metodi. Non affronteremo del resto lo studio sistematico delle possibilità logiche offerte dal nuovo punto di vista in cui ci poniamo, ma ci limiteremo a descrivere un processo di quantizzazione dell'onda materiale che solo sembra avere attualmente importanza applicativa; esso si presenta come una naturale generalizzazione del metodo di JORDAN-WIGNER⁽²⁾ e permette non solo di dare una forma simmetrica alla teoria degli elettroni-positroni, ma anche di costruire una teoria sostanzialmente nuova per le particelle senza carica elettrica (neutroni e ipotetici neutrini). Per quanto non sia forse ancora possibile chiedere all'esperienza una decisione fra questa nuova teoria e quella consistente nella semplice estensione delle equazioni di Dirac alle particelle neutre, va tenuto presente che la prima introduce, in questo campo ancora poco esplorato, un minor numero di entità ipotetiche.

(2) P. JORDAN e E. WIGNER, "Z. Physik", 47, 631 (1928).

Lasciando al lettore l'ovvia estensione delle formole seguenti ai sistemi continui di cui dovremo occuparci in seguito, esponiamo per maggiore chiarezza il metodo di quantizzazione con riferimento ai sistemi discreti. Sia dunque un sistema fisico descritto dalle variabili *reali* (matrici simmetriche Hermitiane) q_1, q_2, \dots, q_n . Definiamo una funzione Lagrangiana

$$(1) \quad L = i \sum_{r,s} (A_{rs} q_r \dot{q}_s + B_{rs} q_r q_s),$$

e poniamo

$$(2) \quad \delta \int L dt = 0,$$

intendendo che in queste formole A_{rs} e B_{rs} sono numeri reali ordinari, costanti i primi ed eventualmente dipendenti dal tempo i secondi, e che soddisfano alle relazioni

$$(3) \quad A_{rs} = A_{sr}; \quad B_{rs} = -B_{sr},$$

essendo inoltre $\det \|A_{rs}\| \neq 0$.

Se le q fossero grandezze commutabili, il principio variazionale (2) non avrebbe alcun significato essendo identicamente verificato. Per grandezze non commutabili la (2) implica invece l'annullarsi in ogni istante della matrice Hermitiana

$$i \sum_r \left[\delta q_r \left(\sum_s A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s \right) - \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) \delta q_r \right] = 0,$$

comunque si scelgano le variazioni δq_r . Questo è possibile solo se le espressioni $\sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s)$ sono multiple della matrice unità, in modo che con qualche opportuna aggiunta al principio variazionale (2) (per es. imponendo l'annullarsi della somma dei termini diagonali⁽³⁾ in tali espressioni) si possono considerare le seguenti come equazioni del movimento

$$(4) \quad \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Vogliamo ora mostrare che queste equazioni possono farsi dipendere nel modo consueto

$$\dot{q}_r = -\frac{2\pi i}{h} (q_r H - H q_r)$$

⁽³⁾ L'applicazione fisica che è esposta più avanti suggerisce la restrizione più rigorosa che in qualunque combinazione lineare delle q_r e \dot{q}_r con ogni autovalore debba presentarsene un altro uguale e opposto.

dall'Hamiltoniana

$$(5) \quad H = -i \sum_{r,s} B_{rs} q_r q_s,$$

la cui forma esatta sarà meglio giustificata in seguito, purché si stabiliscano fra le q_r opportune relazioni di *anticommutabilità*. Sostituendo nelle (4) mediante le equazioni successive si trova infatti(*)

$$\begin{aligned} \sum_s B_{rs} q_s &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} (q_s q_l q_m - q_l q_m q_s) = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} [(q_s q_l + q_l q_s) q_m - q_l (q_s q_m + q_m q_s)] = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{lm} B_{lm} \left\{ q_m \left[\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) \right] + \left[\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) \right] q_m \right\}, \end{aligned}$$

e basta porre

$$(6) \quad \sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) = \frac{h}{4\pi} \delta_{rl},$$

perché le (4) siano soddisfatte. Indicando con $\|A_{rs}^{-1}\|$ la matrice inversa di $\|A_{rs}\|$ la (6) può scriversi

$$(6') \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi} A_{rs}^{-1}.$$

Nel caso speciale che A sia ridotta a forma diagonale

$$A_{rs} = a_r \delta_{rs},$$

si avrà dunque

$$(7) \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi a_r} \delta_{rs}.$$

Passiamo ora ad applicare questo schema alle equazioni di Dirac.

(*) Ne "Il Nuovo Cimento", nell'ultimo termine dell'equazione prima della parentesi graffa finale compare erroneamente una parentesi quadra di troppo. (Nota del Curatore.)

2. Dalle equazioni di Dirac senza campo esterno

$$(8) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) + \beta mc \right] \psi = 0,$$

può notoriamente essere eliminata l'unità immaginaria (e in modo relativisticamente invariante) con un'opportuna scelta degli operatori α e β . Noi ci riferiremo appunto ad un sistema di coordinate intrinseche tale che renda le (8) reali, avvertendo espressamente che le formole a cui perverremo non sono valide, senza opportune modificazioni, in coordinate generali. Indicando come di consueto, con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e ρ_1, ρ_2, ρ_3 due terne indipendenti di matrici di Pauli, porremo:

$$(9) \quad \alpha_x = \rho_1 \sigma_x; \quad \alpha_y = \rho_3; \quad \alpha_z = \rho_1 \sigma_z; \quad \beta = -\rho_1 \sigma_y;$$

con che dividendo le (9) per $-\frac{h}{2\pi i}$ e ponendovi $\beta' = -i\beta, \mu = \frac{2\pi mc}{h}$ si hanno le equazioni reali

$$(8') \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] \psi = 0.$$

In conseguenza le (8) si scindono in due gruppi distinti, di cui l'uno agisce sulla parte reale, l'altro sulla parte immaginaria di ψ . Poniamo $\psi = U + iV$ e consideriamo le equazioni reali (8') in quanto agiscono sulle U :

$$(10) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U = 0.$$

Queste equazioni *da sole*⁽⁴⁾, cioè senza considerare le equazioni identiche che legano le V , possono essere ricondotte al principio variazionale esposto anteriormente ed assoggettate al processo di quantizzazione già descritto, mentre nulla di simile potrebbe farsi con i metodi elementari.

Come principio variazionale da cui dedurre le (10) assumiamo il seguente:

$$(11) \quad \delta \int i \frac{hc}{2\pi} U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U dq dt = 0.$$

È facile riconoscere che le condizioni (3) nella loro naturale estensione ai sistemi continui sono verificate. Seguono in base alle (7) le relazioni di anticommutabilità

$$(12) \quad U_i(q)U_k(q') + U_k(q')U_i(q) = \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta(q - q'),$$

⁽⁴⁾ Il comportamento delle U per riflessione in un punto dello spazio si può definire convenientemente tenendo presente che, già per altre ragioni, un cambiamento simultaneo di segno delle U_r non ha significato fisico. Nel nostro schema: $U'(q) = RU(-q)$ con $R = i\rho_1 \sigma_y$ e quindi $R^2 = -1$. Similmente se si inverte l'asse del tempo: $U'(q, t) = i\rho_2 U(q, -t)$.

mentre l'energia diviene, per la (5):

$$(13) \quad H = \int U^* [-c(\alpha, p) - \beta mc^2] U dq.$$

L'invarianza relativistica di (12) e (13) non richiede particolare dimostrazione, poiché completando tali equazioni con quelle analoghe che si riferiscono alle V , nonché con le relazioni di anticommutabilità fra le U e le V : $U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) = 0$, si riottiene null'altro che l'ordinario schema di Jordan-Wigner applicato alle equazioni di Dirac senza campo. Ma è notevole che la parte di tale formalismo che si riferisce alle U (o alle V) possa *da sola* essere considerata come descrizione teorica, in armonia con i metodi generali della meccanica quantistica, di un qualche sistema materiale. Il fatto che tale formalismo ridotto non si adatti alla descrizione degli elettroni positivi e negativi, può bene essere dovuto alla presenza della carica elettrica e non impedisce l'affermazione che allo stato attuale delle nostre conoscenze le (12) e (13) costituiscono la più semplice rappresentazione teorica di un sistema di particelle neutre. Il vantaggio di questo procedimento rispetto alla interpretazione elementare delle equazioni di Dirac è (come vedremo meglio fra poco) che non vi è più nessuna ragione di presumere l'esistenza di antineutroni o antineutrini. Questi ultimi vengono in realtà utilizzati nella teoria dell'emissione β positiva⁽⁵⁾, ma tale teoria può essere, ovviamente, modificata in modo che l'emissione β , sia negativa che positiva, venga sempre accompagnata dall'emissione di un neutrino.

In ragione dell'interesse che l'ipotesi suddetta conferisce alle equazioni (12) e (13), crediamo utile esaminarne da vicino il significato. Sviluppiamo perciò le U nell'interno di un cubo di lato L secondo il sistema di funzioni periodiche

$$(14) \quad f_\gamma(q) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)},$$

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z); \quad \gamma_x = \frac{n_1}{L}, \quad \gamma_y = \frac{n_2}{L}, \quad \gamma_z = \frac{n_3}{L} :$$

$$n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ponendo

$$(15) \quad U_r(q) = \sum_{\gamma} a_r(\gamma) f_\gamma(q).$$

In conseguenza della realtà delle U , sarà

$$(16) \quad a_r(\gamma) = \bar{a}_r(-\gamma).$$

⁽⁵⁾ Cfr. G. WICK, "Rend. Accad. Lincei", 21, 170 (1935).

Ponendoci nel caso generale $\gamma \neq 0$, segue dalle (12)

$$(17) \quad \begin{cases} a_r(\gamma)\bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma)a_r(\gamma) = \frac{1}{2}\delta_{rs}, \\ a_r(\gamma)a_s(\gamma) + a_s(\gamma)a_r(\gamma) = 0, \\ \bar{a}_r(\gamma)\bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma)\bar{a}_r(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Tutte queste grandezze sono inoltre anticommutabili con le $a(\gamma')$ e $\bar{a}(\gamma')$ per γ' diverso sia da γ che da $-\gamma$.

L'energia risulta per la (13):

$$(18) \quad H = \sum_{\gamma} \sum_{r,s=1}^4 [-hc(\gamma, \alpha^{rs}) - mc^2\beta^{rs}] \bar{a}_r(\gamma)a_s(\gamma).$$

La quantità di moto secondo x corrisponde, come sempre, a meno del fattore $\frac{h}{2\pi}i$ allo spostamento unitario in tale direzione

$$(19) \quad M_x = \int U^* p_x U dq = \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^4 h\gamma_x \bar{a}_r(\gamma)a_k(\gamma),$$

e analogamente per M_y e M_z .

Per ogni valore di γ figura in (18) una forma Hermitiana che ha notoriamente due autovalori positivi e due negativi, tutti uguali in valore assoluto a $c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2}$.

Possiamo quindi porre in luogo di (18)

$$(18') \quad H = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} [\bar{b}_1(\gamma)b_1(\gamma) + \bar{b}_2(\gamma)b_2(\gamma) - \bar{b}_3(\gamma)b_3(\gamma) - \bar{b}_4(\gamma)b_4(\gamma)]$$

essendo le b_r opportune combinazioni lineari delle a_r ottenute per trasformazione unitaria. Risulta inoltre dalla (16) che le $b_r(\gamma)$ sono esprimibili linearmente mediante le $\bar{b}_r(-\gamma)$.

Dal fatto poi che la forma Hermitiana che figura in (18) per un dato valore di γ resta invariata in virtù di (16) e (17) quando si cambia γ in $-\gamma$ segue tenendo ancora conto di (17) che si può porre:

$$(20) \quad b_3(\gamma) = \bar{b}_1(-\gamma); \quad b_4(\gamma) = \bar{b}_2(-\gamma).$$

Introducendo per semplicità le nuove variabili

$$(21) \quad B_1(\gamma) = \sqrt{2}b_1(\gamma); \quad B_2(\gamma) = \sqrt{2}b_2(\gamma),$$

otteniamo così

$$(22) \quad H = \sum_{\gamma} c \sqrt{m^2 c^2 + h^2 \gamma^2} \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

$$(23) \quad M_x = \sum_{\gamma} h \gamma_x \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

essendosi posto

$$n_r(\gamma) = \bar{B}_r(\gamma) B_r(\gamma) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ed essendo(*) inoltre

$$(24) \quad \begin{cases} B_r(\gamma) \bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma') B_r(\gamma) = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{rs}, \\ B_r(\gamma) B_s(\gamma') + B_s(\gamma') B_r(\gamma) = 0, \\ \bar{B}_r(\gamma) \bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma') \bar{B}_r(\gamma) = 0, \end{cases}$$

come si otterrebbe formalmente per i coefficienti dello sviluppo di un'onda materiale *a due componenti* secondo lo schema di Jordan-Wigner.

Queste formole sono completamente analoghe, salvo la diversa statistica, a quelle che si ottengono dalla quantizzazione delle equazioni di Maxwell. In luogo di quanti immateriali si hanno particelle con una massa di riposo finita e anche esse con due possibilità di polarizzazione. Anche qui *come nel caso della radiazione*, sono presenti i mezzi quanti di riposo della energia e della quantità di moto, salvo che il loro segno è opposto in apparente relazione con la diversa statistica. Essi non costituiscono pertanto una difficoltà specifica e allo stato attuale della teoria debbono anche qui essere considerati come semplici costanti additive prive di significato.

La descrizione mediante autofunzioni di queste particelle, così come dei quanti di luce, non riesce in modo conveniente, ma nel nostro caso l'esistenza di una massa di riposo permette di considerare l'*approssimazione non relativistica*, nella quale sono naturalmente valide tutte le nozioni della meccanica quantistica elementare. Questa approssimazione può avere interesse pratico sopra tutto nel caso di particelle pesanti (neutroni).

Il mezzo più semplice per passare allo spazio delle configurazioni consiste nell'associare a un generico oscillatore l'onda piana

$$\frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} \delta_{\sigma\sigma_r}, \quad (r = 1, 2),$$

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" è in realtà scritto "essendosi" e non essendo. (Nota del Curatore in E. AMALDI, *op. cit.*)

corrispondente allo stesso valore della quantità di moto e con due possibilità di polarizzazione per tenere conto della molteplicità degli oscillatori. Possiamo andare oltre e rappresentare con l'autofunzione complessa a due valori $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ non più una sola particella ma un sistema che ne contenga in numero indeterminato secondo il metodo di Jordan-Wigner. Basterà allora porre

$$(25) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = \sum_{\gamma} \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} B_1(\gamma), \\ \Phi_2(q) = \sum_{\gamma} \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} B_2(\gamma). \end{cases}$$

Nell'approssimazione non relativistica ($|\gamma| \ll \frac{mc}{h}$) le costanti $b_r(\gamma)$ che figurano in (18') sono combinazioni lineari della $a_r(\gamma)$ con coefficienti indipendenti da γ .

Tali coefficienti dipendono solo dagli elementi di β e in virtù di (9) si può porre

$$\begin{aligned} b_1(\gamma) &= \frac{a_3(\gamma) - ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}; & b_3(\gamma) &= \frac{a_3(\gamma) + ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}, \\ b_2(\gamma) &= \frac{a_4(\gamma) + ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}; & b_4(\gamma) &= \frac{a_4(\gamma) - ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

con che anche le (20), a causa di (16), sono soddisfatte. Dalle (15) e (25) segue dunque per l'approssimazione non relativistica:

$$(26) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = U_3(q) - iU_2(q), \\ \Phi_2(q) = U_4(q) + iU_1(q). \end{cases}$$

Notiamo la circostanza, di interesse puramente formale, che $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ coincide a meno del fattore $\sqrt{2}$ con la coppia di componenti grandi delle autofunzioni appartenenti alle equazioni (10), interpretate nel modo consueto, senza cioè restrizioni di realtà. Per dimostrarlo basta verificare che la trasformazione $\psi = \frac{1-\rho_2\sigma_y}{\sqrt{2}}U$ permette di passare dallo schema (9) a quello usuale di Dirac ($\alpha = \rho_1\sigma; \beta = \rho_3$) e che risulta effettivamente

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_1, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2;$$

in tale schema sono infatti notoriamente ψ_3 e ψ_4 le componenti grandi. Questo avvicinamento, se chiarisce la legge di trasformazione di Φ di fronte alle rotazioni nello spazio, cessa naturalmente di avere significato in rapporto alle trasformazioni generali di Lorentz.

L'esistenza di formule semplici come le (26), potrebbe fare ritenere superfluo, almeno fino a una certa approssimazione, il passaggio attraverso le onde piane. In realtà tale passaggio è sempre concettualmente necessario per ottenere la cancellazione dei mezzi

quanti di riposo. Dopo tale cancellazione l'espressione dell'energia è infatti naturalmente in prima approssimazione

$$(27) \quad H = \int \tilde{\Phi} \left(mc^2 + \frac{1}{2m} p^2 \right) \Phi dq,$$

e differisce quindi in modo essenziale dalla (13).

3. Come abbiamo già detto, lo schema (12) non è sufficiente per la descrizione di particelle cariche; ma l'aggiunta di una seconda quaterna di grandezze reali V_r analoghe alle U_r permette di riottenere l'ordinaria elettrodinamica in una forma simmetrica rispetto all'elettrone e al positrone. Consideriamo dunque due serie di grandezze reali rappresentanti rispettivamente le particelle materiali e il campo elettromagnetico. Le grandezze della prima specie vanno interpretate secondo lo schema esposto al n. 1, mentre quelle della seconda serie, e cioè i potenziali elettromagnetici φ e $A = (A_x, A_y, A_z)$ possono intendersi come grandezze classiche quantizzate secondo la regola di Heisenberg fondata sul principio di corrispondenza. L'insieme delle equazioni di Maxwell e Dirac si potrà ottenere (con l'accennata restrizione per quanto riguarda le seconde) da un principio variazionale(*)

$$\delta \int L dq dt = 0$$

risultando L dalla somma di tre termini

$$L = L' + L'' + L'''$$

di cui il primo è relativo all'onda materiale

$$(28) \quad L' = i \frac{hc}{2\pi} \left\{ U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U + \right. \\ \left. + V^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] V \right\},$$

e il secondo si riferisce al campo di radiazione che supponiamo quantizzato secondo il metodo di FERMI⁽⁶⁾

$$(29) \quad L'' = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A \right)^2.$$

(*) Ne "Il Nuovo Cimento" manca erroneamente il membro di destra dell'equazione " = 0". (Nota del Curatore, si veda anche E. Amaldi, *op. cit.*)

⁽⁶⁾ E. FERMI, "Rend. Accad. Lincei", 9, 881 (1929).

Bisogna quindi imporre la condizione aggiunta

$$(30) \quad \frac{1}{c}\dot{\varphi} + \operatorname{div} A = 0.$$

L'espressione (29) differisce in realtà da quella usata originariamente da FERMI, ma solo per termini integrabili. Essa conduce a una definizione del momento P_0 coniugato a φ tale da permettere l'immediata eliminazione di una delle due onde longitudinali senza passare per lo sviluppo secondo le onde piane; è a questo riguardo del tutto indifferente che il secondo termine nell'espressione (29) di L'' venga moltiplicato per una costante arbitraria diversa da zero.

Quanto al termine L''' , esso va scelto in modo che $\psi = U + iV$ obbedisca alle equazioni di Dirac (8) completate con l'introduzione del campo esterno, cioè alle equazioni:

$$\left[\frac{W}{c} + \frac{e}{c}\varphi + \left(\alpha, p + \frac{e}{c}A \right) + \beta mc \right] \psi = 0.$$

Questo praticamente obbliga a porre

$$(31) \quad L''' = ieU^*[\varphi + (\alpha, A)]V - ieV^*[\varphi + (\alpha, A)]U.$$

Dalla variazione dei potenziali elettromagnetici si deducono allora le seguenti espressioni per le densità di carica e di corrente

$$(32) \quad \begin{cases} \rho = -ie(U^*V - V^*U) = -e\frac{\tilde{\psi}\psi - \psi^*\bar{\psi}}{2}, \\ I = ie(U^*\alpha V - V^*\alpha U) = e\frac{\tilde{\psi}\alpha\psi - \psi^*\alpha\bar{\psi}}{2}. \end{cases}$$

Queste espressioni differiscono da quelle consuete solo per *costanti infinite*. La cancellazione di tali costanti infinite è richiesta dalla simmetrizzazione della teoria che è già implicita nella forma scelta per il principio variazionale; infatti lo scambio di U_r e V_r , che entrano simmetricamente in L' , equivale appunto a un cambiamento di segno della carica elettrica.

Le U e V obbediscono alle relazioni di anticommutabilità

$$\begin{aligned} U_r(q)U_s(q') + U_s(q')U_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ V_r(q)V_s(q') + V_s(q')V_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) &= 0, \end{aligned}$$

equivalenti all'ordinario schema di Jordan-Wigner quando si faccia $\psi = U + iV$. I potenziali elettromagnetici φ , A_x , A_y , A_z e i loro momenti coniugati soddisfanno invece alle

ordinarie relazioni di commutabilità, ad esempio $P_0(q)\varphi(q') - \varphi(q')P_0(q) = \frac{\hbar}{2\pi i}\delta(q - q')$ essendo ora

$$(33) \quad \begin{cases} P_0 = -\frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \operatorname{div} A \right), \\ P_x = -\frac{1}{4\pi c} E_x; \quad P_y = -\frac{1}{4\pi c} E_y; \quad P_z = -\frac{1}{4\pi c} E_z. \end{cases}$$

L'energia consta di tre parti: $H = H' + H'' + H'''$. Il primo termine H' si deduce da L' secondo le regole già esposte. Il secondo si ottiene secondo le regole classiche $H'' = \int [P_0\dot{\varphi} + (P, A) - L'']dq$, essendosi posto $P = (P_x, P_y, P_z)$. Quanto al termine H''' , esso si può dedurre da L''' seguendo indifferentemente l'uno o l'altro metodo (nel nostro caso $H''' = -\int L'''dq$) e così deve essere dato che L''' è funzione tanto delle grandezze di campo materiali che di quelle elettromagnetiche. Questo prova d'altronde la necessità della posizione (5). L'equazione di continuità (30) è valida sempre purché sia soddisfatta inizialmente insieme con l'equazione della divergenza $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$. Segue, per le (33), che la cinematica definita dalle relazioni di scambio deve essere ridotta mediante le equazioni

$$(34) \quad \begin{cases} P_0(q) = 0, \\ \operatorname{div} P + \frac{1}{c}\rho = 0, \end{cases}$$

e quindi mediante la fissazione di due grandezze di campo e conseguente indeterminazione delle coniugate. *La prima* delle (34) importa dunque l'eliminazione di P_0 e di φ dall'espressione di H . Tale eliminazione si ottiene facilmente facendo uso delle (33) e si giunge così alla formola

$$(35) \quad H = \int \left\{ \tilde{\psi} [-c(\alpha, p) - \beta mc^2] \psi - (A, I) + 2\pi c P^2 + \frac{1}{8\pi} |\operatorname{rot} A|^2 \right\} dq.$$

Circa la questione dell'invarianza relativistica, osserviamo che le $\psi = U + iV$ soddisfano alle equazioni di Dirac, mentre le equazioni di Maxwell continuano anche esse a valere con espressioni delle densità di carica e di corrente che obbediscono alla legge di trasformazione relativistica. Queste due circostanze assicurano che la dimostrazione completa dell'invarianza della teoria è già implicita nei risultati di HEISENBERG e PAULI⁽⁷⁾. Passiamo ora all'interpretazione del formalismo.

4. Sviluppando la U , e analogamente la V , secondo il sistema di funzioni periodiche già considerato, troviamo come ovvia estensione della (22), dopo la cancellazione dei

(7) W. HEISENBERG e W. PAULI, "Z. Physik", 56, 1 (1929); 59, 168 (1930).

mezzi quanti di riposo

$$(36) \quad H' = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^2 [\bar{B}_r(\gamma)B_r(\gamma) + \bar{B}'_r(\gamma)B'_r(\gamma)],$$

riferendosi le B_r e B'_r rispettivamente allo sviluppo delle U e V ; le B_r e B'_r e le loro coniugate obbediscono alle consuete relazioni di anticommutabilità. Introducendo, per ogni valore di γ , quattro opportune funzioni di spin $\xi_s(\gamma)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) a quattro valori complessi e formanti un sistema unitario, si potrà porre

$$(37) \quad \begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\gamma} \{B_1(\gamma)\xi_1(\gamma) + B_2(\gamma)\xi_2(\gamma) + \bar{B}_1(-\gamma)\xi_3(\gamma) + \bar{B}_2(-\gamma)\xi_4(\gamma)\} f_{\gamma}(q), \\ V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\gamma} \{B'_1(\gamma)\xi_1(\gamma) + B'_2(\gamma)\xi_2(\gamma) + \bar{B}'_1(-\gamma)\xi_3(\gamma) + \bar{B}'_2(-\gamma)\xi_4(\gamma)\} f_{\gamma}(q), \end{cases}$$

essendo inoltre soddisfatte le relazioni

$$(38) \quad \begin{cases} \xi_3(\gamma) = \bar{\xi}_1(-\gamma), \\ \xi_4(\gamma) = \bar{\xi}_2(-\gamma). \end{cases}$$

Dall'espressione (32) della densità di elettricità segue per la carica totale

$$(39) \quad \begin{aligned} Q &= -\frac{ie}{2} \int [U^*(q)V(q) - V^*(q)U(q)]dq = \\ &= -\frac{ie}{2} \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^2 [B_r(\gamma)\bar{B}'_r(\gamma) + \bar{B}_r(\gamma)B'_r(\gamma) - \bar{B}'_r(\gamma)B_r(\gamma) - B'_r(\gamma)\bar{B}_r(\gamma)]. \end{aligned}$$

Se si pone

$$(40) \quad C_r^{\text{el}} = \frac{B_r + iB'_r}{\sqrt{2}}; \quad C_r^{\text{pos}} = \frac{B_r - iB'_r}{\sqrt{2}}$$

le espressioni (36) e (39) dell'energia e della carica si possono portare nella forma

$$(41) \quad H' = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^2 (\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}})$$

$$(42) \quad \begin{aligned} Q &= e \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^2 \left[-\left(\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} - \frac{1}{2} \right) + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= e \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^2 \left(-\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}} \right). \end{aligned}$$

L'eliminazione dei *mezzi quanti di riposo di elettricità* avviene dunque automaticamente purché, bene inteso, si esegua prima la sommatoria interna. L'insieme di (41) e (42) rappresenta oscillatori equivalenti a un doppio sistema di particelle obbedienti alla statistica di Fermi con la massa di riposo m e la carica $\pm e$; le variabili C_r^{pos} si riferiscono ai positroni e le C_r^{el} agli elettroni.

L'eliminazione del campo elettrico longitudinale mediante la seconda delle (34) presenta difficoltà in una teoria simmetrica per l'impossibilità di porre ρ , quale risulta da (32), in forma diagonale. Il risultato dell'eliminazione è ben noto (per quanto parzialmente illusorio per difficoltà di convergenza) nell'elettrodinamica ordinaria in cui si pone $\rho = -e\tilde{\psi}\psi$; ma esso è egualmente noto se si parte da $\rho = e\psi^*\bar{\psi}$ poiché quest'ultima posizione equivale interamente a invertire l'ufficio dell'elettrone e del positrone, considerando quest'ultimo come particella reale e l'elettrone come "vuoto" di positrone. Sembra plausibile che quegli elementi di matrice che risultassero della stessa forma in tali teorie opposte, si debbono conservare nella teoria simmetrica. Supponiamo dunque di aver proceduto alla eliminazione della parte irrotazionale di A e P .

L'espressione (35) di H verrà modificata in due modi: in primo luogo intendendo che A e P in questa espressione rappresentino solo la parte priva di divergenza di tali vettori; e in secondo luogo aggiungendo un termine che rappresenta l'energia elettrostatica. Questo termine ha una forma differente nella teoria ordinaria (elettrone-vuoto di elettrone) e in quella opposta. Nella prima si ha conservando l'interazione di ogni particella con se stessa

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \tilde{\psi}(q)\psi(q)\tilde{\psi}(q')\psi(q')dqdq',$$

e nella seconda

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \psi^*(q)\bar{\psi}(q)\psi^*(q')\bar{\psi}(q')dqdq'.$$

Mediante le (37) e (40) si può esprimere l'energia elettrostatica in funzione delle C . I soli termini elettrostatici che hanno ricevuto applicazione fisica sono peraltro identici nelle due teorie; essi sono quelli che dal punto di vista corpuscolare si lasciano interpretare come repulsione o attrazione fra particelle distinte della stessa specie o di specie differente.

Per quanto infine concerne l'interazione con il campo di radiazione, l'unica differenza fra la teoria simmetrica e quella ordinaria riguarda la cancellazione di costanti di risultante indeterminata, relative ai singoli oscillatori, nell'espressione della densità di corrente; anche qui rimangono invariate le formole di interesse applicativo.

Commento alla Nota Scientifica n. 9 : “Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone”.

Scritto nel 1937, un anno prima della sua tragica scomparsa, questo lavoro rappresenta probabilmente il contributo più duraturo di Ettore Majorana alla Fisica moderna. Il lavoro è scritto in un italiano elegante e conciso (la traduzione in inglese è risultata più lunga del testo originale) ed affronta il problema di formulare la teoria di Dirac eliminando del tutto l’armamentario degli stati ad energia negativa.

Nella usuale formulazione, si parte da una situazione altamente asimmetrica tra elettroni e positroni, per arrivare solo alla fine a scoprire che le due particelle sono perfettamente simmetriche tra loro. La simmetria elettrone-positrone è talmente poco evidente che lo stesso Dirac, nella sua prima formulazione, aveva proposto di identificare le particelle positive, le lacune, con il protone.

Riferendosi alla formulazione originale, Majorana nota che

“... gli artifici suggeriti per dare alla teoria una forma simmetrica che si accordi con il suo contenuto, non sono del tutto soddisfacenti; sia perché si parte sempre da una impostazione asimmetrica, sia perché la simmetrizzazione viene in seguito ottenuta mediante tali procedimenti (come la cancellazione di costanti infinite) che possibilmente dovrebbero evitarsi. Perciò abbiamo tentato una nuova via che conduce più direttamente alla meta.”

Partendo da queste premesse, Majorana delinea una teoria di campo basata su variabili anticommutanti, prive quindi di analogia classica, e deriva l’equazione di Dirac da un principio variazionale.

L’elettrone è rappresentato da un campo complesso, che si può decomporre in parte reale e parte immaginaria. Tuttavia, nella particolare rappresentazione delle matrici di Dirac in cui esse sono tutte immaginarie (da allora nota come rappresentazione di Majorana) ciascuna delle due componenti può, separatamente, *“essere considerata come una descrizione teorica, in armonia con i metodi generali della meccanica quantistica, di un qualche sistema materiale”*.

Naturalmente, Majorana riconosce prontamente che per l’elettrone, che possiede una carica elettrica conservata, non si può fare a meno di considerare le due componenti allo stesso tempo. Ma l’economicità dello schema lo porta naturalmente a supporre che esso possa trovare applicazione per le particelle neutre.

“Il vantaggio di questo procedimento... è che non vi è più nessuna ragione per presumere l’esistenza di antineutroni o antineutrini. Questi ultimi vengono in realtà utiliz-

zati nella teoria dell'emissione β positiva, ma tale teoria può essere ovviamente modificata in modo che l'emissione β , sia positiva sia negativa, venga sempre accompagnata dall'emissione di un neutrino."

Majorana si riferisce qui alla teoria dei raggi β positivi, formulata appena due anni prima, sempre a Roma, da Giancarlo Wick.

Dalla riformulazione della teoria di Dirac emerge una possibilità fisica del tutto inattesa, che da allora è stata oggetto di scrutinio sperimentale e teorico, ed alla quale non siamo riusciti ancora a dare una risposta.

La proposta del neutrino di Majorana ha avuto sorti alterne e si è intrecciata con la "teoria a due componenti" del neutrino formulata da Herman Weyl qualche anno prima, nel 1929.

È un fatto che le particelle emesse nei decadimenti β negativi e in quelli β positivi si comportano diversamente: nella loro interazione con i nuclei atomici i primi producono solo positroni, ed i secondi solo elettroni. Tuttavia, la forma $V - A$ dell'interazione e la teoria di Weyl permettono di associare questa differenza alla differenza di elicità delle due particelle.

Poiché l'elicità è conservata per una particella di massa nulla, deviazioni da questo comportamento si avrebbero solo per termini dell'ordine del rapporto (massa del neutrino)/(energia del neutrino), che assume valori completamente trascurabili nelle reazioni iniziate da neutrini.

La natura di Majorana del neutrino si può mettere alla prova con l'osservazione dei decadimenti *doppio- β senza neutrino*. Sono processi di secondo ordine nell'interazione di Fermi. Nel primo passo viene emesso, insieme ad un elettrone, un neutrino virtuale con elicità positiva, che successivamente viene assorbito come se fosse un neutrino (elicità negativa), con emissione di un secondo elettrone. Il processo complessivo, $N^* \rightarrow N + 2e$, viola la conservazione del numero leptonico ed ha un'ampiezza proporzionale alla massa di Majorana del neutrino. La sua esistenza sarebbe la prova evidente che "*non vi è alcuna ragione per presumere... l'esistenza di... antineutrini.*"

Rimasta a lungo come una possibilità alquanto esotica, il neutrino di Majorana è emerso, ai nostri giorni, come la spiegazione più naturale della piccolissima massa del neutrino.

Inoltre, l'assenza di un numero leptonico conservato, L , analogo alla carica dell'elettrone, permette di speculare che proprio il decadimento di neutrini di Majorana super-pesanti abbia dato luogo, nell'Universo primordiale, ad un'asimmetria in L , trasformata poi, in virtù della stretta conservazione della combinazione $B - L$ (B = numero barionico), nell'asimmetria materia-antimateria del nostro Universo.

In diversi laboratori sotterranei in giro per il mondo si è cercato di mettere in evidenza il decadimento doppio- β senza neutrini, finora senza successo. Presso i Laboratori del Gran Sasso dell'INFN è in preparazione un esperimento di dimensioni mai raggiunte prima, CUORE, che dovrebbe porre limiti molto stringenti al processo doppio β ,... oppure osservarlo.

Mi piace pensare che proprio nel nostro Paese si possa rispondere affermativamente alla domanda posta sul tappeto da Majorana più di mezzo secolo fa, e dare allo stesso tempo una possibile spiegazione alla preponderanza della materia sull'antimateria nell'Universo, da cui è dipesa la nostra stessa esistenza.

LUCIANO MAIANI
Università di Roma "La Sapienza"

A symmetric theory of electrons and positrons^(*)

ETTORE MAJORANA

Summary. — It is shown that it is possible to achieve complete formal symmetrization in the electron and proton quantum theory by means of a new quantization process. The meaning of DIRAC equations is somewhat modified and there is no longer any reason to speak of negative-energy states nor to assume, for any other types of particles, especially neutral ones, the existence of antiparticles, corresponding to the “holes” of negative energy.

The interpretation of the so-called “negative energy states” proposed by DIRAC⁽¹⁾ leads, as is well known, to a substantially symmetric description of electrons and positrons. The substantial symmetry of the formalism consists precisely in that the theory itself gives completely symmetric results, whenever it is possible to apply it while overcoming divergence problems.

The prescriptions needed to cast the theory into a symmetric form, in conformity with its content, are however not entirely satisfactory, because one always starts from an asymmetric form or because symmetric results are obtained only after one applies appropriate procedures, such as the cancellation of divergent constants, that one should

(*) Translated from “Il Nuovo Cimento”, vol. 14, 1937, pp. 171-184, by Luciano Maiani in “Soryushiron Kenkyu”, 63 (1981) 149-462. (Courtesy of L. Maiani.) The present translation has been revised by the Editor with the addition of the summary which was missing in “Soryushiron Kenkyu”.

⁽¹⁾ P. A. M. DIRAC, “Proc. Camb. Phil. Soc.”, 30, 150 (1924). See also W. HEINSENBERG, “Z. Physik”, 90, 209 (1934).

possibly avoid. For these reasons, we have attempted a new approach, which leads more directly to the desired result.

In the case of electrons and positrons, we may anticipate only a formal progress; but we consider it important, for possible extensions by analogy, that the very notion of negative energy states can be avoided. We shall see, in fact, that it is perfectly, and most naturally, possible to formulate a theory of elementary neutral particles which do not have negative (energy) states.

1. It is well known that quantum electrodynamics can be deduced by quantizing a system of equations which include the DIRAC wave equations for the electron and the MAXWELL equations. In the latter, the charge density and current are represented by certain expressions containing the electron wave function. The form given to these expressions adds, in reality, something new because it allows to derive the asymmetry with respect to the sign of the electric charge, an asymmetry which is not present in the Dirac equations. These expressions can be derived directly from a variational principle, which yields the Maxwell and the Dirac equations at the same time. Therefore, our first problem will be to examine the foundation of the variational principle itself, and the possibility of replacing it with a more appropriate one.

The Maxwell-Dirac equations contain quantities of two different types. On the one side, we have the electromagnetic potentials, which can be given a classical interpretation, within the limits posed by the correspondence principle. On the other side, there are the matter waves, which represent particles obeying the FERMI Statistic, and which have only a quantum interpretation. In this respect, it seems little satisfactory that the equations as well as the whole quantization procedure have to be derived from a variational principle which can be given only a classical interpretation. It seems more natural to search for a generalization of the variational method, such that the variables appearing in the Lagrange function assume, from the very beginning, their final significance, and, therefore, represent not necessarily commuting quantities.

This is the approach we shall follow. This approach is most important for fields obeying the Fermi statistics; reasons of simplicity may indicate, on the other hand, that nothing has to be added to the old method in the case of the electromagnetic field. In fact, we shall not perform a systematic study of all the logical possibilities offered by the new point of view we are adopting. Rather, we limit ourselves to the description of a quantization procedure for the matter-waves, which is the only important case for applications, at present; this method appears as a natural generalization of the JORDAN-WIGNER method⁽²⁾, and it allows not only to cast the electron-positron theory into a symmetric form, but also to construct an essentially new theory for particles not endowed with an electric charge (neutrons and the hypothetical neutrinos). Even though it is perhaps not yet possible to ask experiments to decide between the new theory and a simple extension of the Dirac equations to neutral particles, one should keep in mind

⁽²⁾ P. JORDAN and E. WIGNER, "Z. Physik", 47, 631 (1928).

that the new theory introduces a smaller number of hypothetical entities, in this yet unexplored field.

Leaving to the reader the obvious extension of the formulae to the continuous systems, which we shall consider later on, we illustrate in the following the quantization procedure for discrete systems. Let a physical system be described by the real variables q_1, q_2, \dots, q_n (symmetric, Hermitian matrices). We define a Lagrange function:

$$(1) \quad L = i \sum_{r,s} (A_{rs} q_r \dot{q}_s + B_{rs} q_r q_s),$$

and set:

$$(2) \quad \delta \int L dt = 0,$$

we understand that A_{rs} and B_{rs} are ordinary real numbers, constant the former and, eventually, time-dependent the latter, which obey the relations:

$$(3) \quad A_{rs} = A_{sr}; \quad B_{rs} = -B_{sr},$$

and, furthermore, with $\det \|A_{rs}\| \neq 0$.

If the q 's were ordinary, commuting, variables, the variational principle (2) would have no meaning because it would be identically satisfied. In the case of non-commuting variables, eq. (2) implies the vanishing, at any time, of the Hermitian matrix:

$$i \sum_r \left[\delta q_r \left(\sum_s A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s \right) - \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) \delta q_r \right] = 0,$$

for arbitrary variations δq_r . This is only possible if the expression $\sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s)$ are multiple of the unit matrix so that, after some appropriate modification of the variational principle (2) (*e.g.* by requiring the sum of the diagonal terms in the above expressions to vanish⁽³⁾) we may consider the following equations of motion:

$$(4) \quad \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

We now show that these equations can be derived, following the usual procedure:

$$\dot{q}_r = -\frac{2\pi i}{h} (q_r H - H q_r)$$

⁽³⁾ The physical application which will be illustrated later on suggests the more rigorous restriction that, in any linear combination of q_r and \dot{q}_r to any given eigenvalue there corresponds another one, equal in absolute value and opposite in sign.

from the Hamiltonian:

$$(5) \quad H = -i \sum_{r,s} B_{rs} q_r q_s,$$

(whose exact form will be better justified in the following) provided we assume suitable *anticommutation* relations for the q_r . Substituting in eq. (4) the successive equations, one finds:

$$\begin{aligned} \sum_s B_{rs} q_s &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} (q_s q_l q_m - q_l q_m q_s) = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} [(q_s q_l + q_l q_s) q_m - q_l (q_s q_m + q_m q_s)] = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{lm} B_{lm} \left\{ q_m \left[\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) \right] + \left[\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) \right] q_m \right\}, \end{aligned}$$

so that it suffices to set:

$$(6) \quad \sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) = \frac{h}{4\pi} \delta_{rl},$$

for eqs. (4) to be satisfied. Denoting by $\|A_{rs}^{-1}\|$ the inverse matrix of $\|A_{rs}\|$, eq. (6) can be written as:

$$(6') \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi} A_{rs}^{-1}.$$

In the special case where A is reduced to the diagonal form:

$$A_{rs} = a_r \delta_{rs},$$

we have therefore:

$$(7) \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi a_r} \delta_{rs}.$$

We shall now apply the present scheme to the Dirac equations.

2. It is well known that one can eliminate the imaginary unit from the Dirac equations with no external field:

$$(8) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) + \beta mc \right] \psi = 0,$$

with an appropriate choice of the operators α and β (and this can be done in a relativistically invariant fashion). We shall, in fact, refer to a system of intrinsic coordinates such

as to make eqs. (8) real, keeping explicitly in mind that the formulae we shall derive are not valid, without suitable modification, in a more general coordinate system. Denoting, as usual, with $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ and ρ_1, ρ_2, ρ_3 two independent sets of Pauli matrices, we set:

$$(9) \quad \alpha_x = \rho_1 \sigma_x; \quad \alpha_y = \rho_3; \quad \alpha_z = \rho_1 \sigma_z; \quad \beta = -\rho_1 \sigma_y.$$

Dividing eqs. (9) by $-\frac{\hbar}{2\pi i}$ and defining $\beta' = -i\beta$, $\mu = \frac{2\pi mc}{\hbar}$, we obtain the real equations:

$$(8') \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] \psi = 0.$$

As a consequence, eqs. (8) separate into two independent sets of equations, one for the real and one for the imaginary part of ψ . We set $\psi = U + iV$ and consider the real equations (8') as acting on U :

$$(10) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U = 0.$$

The latter equations, *by themselves*⁽⁴⁾, *i.e.* without the similar equations involving V , can be derived from the variational principle previously illustrated and quantized, as indicated above. Nothing similar could be done with elementary methods. Equation (10) can be obtained from the variational principle:

$$(11) \quad \delta \int i \frac{\hbar c}{2\pi} U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U dq dt = 0.$$

It is easy to verify that the conditions (3), in their natural extension to a continuous system, are obeyed. Following eqs. (7) the anticommutation relations hold:

$$(12) \quad U_i(q)U_k(q') + U_k(q')U_i(q) = \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta(q - q'),$$

while the energy, according to (5) is:

$$(13) \quad H = \int U^* [-c(\alpha, p) - \beta mc^2] U dq.$$

The relativistic invariance of (12) and (13) does not require a separate demonstration. If one adds to these equations the analogous ones involving V , as well as the anticommutation relations: $U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) = 0$, one reobtains the usual Jordan-Wigner scheme, applied to the Dirac equations without external field.

⁽⁴⁾ The behaviour of U under space reflection can be conveniently defined taking into account that a simultaneous change of sign of U_r has no physical significance, as already implied by other reasons. In our scheme: $U'(q) = RU(-q)$ with $R = i\rho_1\sigma_y$ and $R^2 = -1$. Similarly, for a time reflection: $U'(q, t) = i\rho_2U(q, -t)$.

It is remarkable, however, that the part of the formalism which refers to U (or V) can be considered, in itself, as the theoretical descriptions of some material system, in conformity with the general methods of quantum mechanics. The fact that the reduced formalism cannot be applied to the description of positive and negative electrons may well be attributed to the presence of the electric charge, and it does not invalidate the statement that, at the present level of knowledge, eqs. (12) and (13) constitute the simplest theoretical representation of neutral particles. The advantage, with respect to the elementary interpretation of the Dirac equation, is that there is now no need to assume the existence of antineutrons or antineutrinos (as we shall see shortly). The latter particles are indeed introduced in the theory of positive β -ray emission⁽⁵⁾; the theory, however, can be obviously modified so that the β -emission, both positive and negative, is always accompanied by the emission of a neutrino.

Considering the interest that the above-mentioned hypothesis gives to eqs. (12) and (13), it seems useful to examine their meaning more closely. To this aim, we developed U , inside a cube of side L , over the system of periodical functions:

$$(14) \quad f_{\gamma}(q) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)},$$

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z); \quad \gamma_x = \frac{n_1}{L}, \quad \gamma_y = \frac{n_2}{L}, \quad \gamma_z = \frac{n_3}{L};$$

$$n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

setting:

$$(15) \quad U_r(q) = \sum_{\gamma} a_r(\gamma) f_{\gamma}(q).$$

As a consequence of the reality of U , we have:

$$(16) \quad a_r(\gamma) = \bar{a}_r(-\gamma).$$

In the general case, $\gamma \neq 0$, it follows from (12) that:

$$(17) \quad \begin{cases} a_r(\gamma)\bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma)a_r(\gamma) = \frac{1}{2}\delta_{rs}, \\ a_r(\gamma)a_s(\gamma) + a_s(\gamma)a_r(\gamma) = 0, \\ \bar{a}_r(\gamma)\bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma)\bar{a}_r(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Furthermore, these quantities anticommute with $a(\gamma')$ and $\bar{a}(\gamma')$, when γ' differs both from γ and from $-\gamma$.

⁽⁵⁾ See G. WICK, "Rend. Accad. Lincei", 21, 170 (1935).

The expression of the energy resulting from (13) is:

$$(18) \quad H = \sum_{\gamma} \sum_{r,s=1}^4 [-hc(\gamma, \alpha^{rs}) - mc^2\beta^{rs}] \bar{a}_r(\gamma) a_s(\gamma).$$

The x component of the linear momentum corresponds to the unit translation along x , up to the factor $\frac{h}{2\pi}i$, as usual:

$$(19) \quad M_x = \int U^* p_x U dq = \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^4 h\gamma_x \bar{a}_r(\gamma) a_r(\gamma),$$

and similarly for M_y and M_z .

For any value of γ we have in (18) a Hermitian form which has, notoriously, two positive and two negative eigenvalues, all equal in absolute value to $c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2}$.

We can thus replace (18) by:

$$(18') \quad H = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} [\bar{b}_1(\gamma)b_1(\gamma) + \bar{b}_2(\gamma)b_2(\gamma) - \bar{b}_3(\gamma)b_3(\gamma) - \bar{b}_4(\gamma)b_4(\gamma)]$$

b_r being appropriate linear combinations of the a_r , obtained by a unitary transformation. Furthermore, it follows from (16) that $b_r(\gamma)$ are linearly related to $\bar{b}_r(-\gamma)$.

The Hermitian form (18), for a given value of γ , remains invariant under the exchange of γ with $-\gamma$, as a consequence of (16) and (17). From this, and keeping again (17) into account, it follows that we can set:

$$(20) \quad b_3(\gamma) = \bar{b}_1(-\gamma); \quad b_4(\gamma) = \bar{b}_2(-\gamma).$$

We introduce, for simplicity, the new variables:

$$(21) \quad B_1(\gamma) = \sqrt{2}b_1(\gamma); \quad B_2(\gamma) = \sqrt{2}b_2(\gamma),$$

and we obtain:

$$(22) \quad H = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

$$(23) \quad M_x = \sum_{\gamma} h\gamma_x \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

where we have set:

$$n_r(\gamma) = \bar{B}_r(\gamma) B_r(\gamma) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

considering, furthermore, that the following relations hold:

$$(24) \quad \begin{cases} B_r(\gamma)\bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma')B_r(\gamma) = \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{rs}, \\ B_r(\gamma)B_s(\gamma') + B_s(\gamma')B_r(\gamma) = 0, \\ \bar{B}_r(\gamma)\bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma')\bar{B}_r(\gamma) = 0, \end{cases}$$

as it would follow formally, in the Jordan-Wigner scheme, for the coefficients in the development of a *two-component* matter-wave.

The preceding formulae are entirely analogous to those obtained in the quantization of the Maxwell equations, except for the different statistic. In the place of massless quanta, we have particles with a finite mass and also for them we have two available polarization states. In the present case, *as in the case of the electromagnetic radiation*, the half-quanta of rest energy and momentum are present, except that they appear with the opposite sign, in apparent connection with the different statistic. They do not constitute a specific difficulty, and they must be considered simply as additive constants, with no physical significance.

Similarly to the case of light quanta, it is not possible to describe with eigenfunctions the states of such particles. In the present case, however, the presence of a rest mass allows one to consider the *non-relativistic approximation*, where all the notions of elementary quantum mechanics apply, obviously. The non-relativistic approximation may be useful primarily in the case of the heavy particles (neutrons).

The simplest way to go to the configuration space representation is to associate the following plane wave to each oscillator:

$$\frac{1}{L^{3/2}}e^{2\pi i(\gamma,q)}\delta_{\sigma\sigma_r}, \quad (r = 1, 2),$$

corresponding to the same value of the momentum, and with two possible polarization states, to keep into account the multiplicity of oscillators. We can go further, and describe not a simple particle, but a system with an indefinite number of particles with the two-valued, complex eigenfunction $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, according to the Jordan-Wigner method. It is sufficient to set:

$$(25) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = \sum_{\gamma} \frac{1}{L^{3/2}}e^{2\pi i(\gamma,q)}B_1(\gamma), \\ \Phi_2(q) = \sum_{\gamma} \frac{1}{L^{3/2}}e^{2\pi i(\gamma,q)}B_2(\gamma). \end{cases}$$

In the non-relativistic approximation ($|\gamma| \ll \frac{mc}{h}$) the constants $b_r(\gamma)$ in (18') are linear combinations of $a_r(\gamma)$, *with γ -independent coefficients*.

The latter coefficients depend only upon the elements of γ and, according to (9), we have:

$$\begin{aligned} b_1(\gamma) &= \frac{a_3(\gamma) - ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}; & b_3(\gamma) &= \frac{a_3(\gamma) + ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}, \\ b_2(\gamma) &= \frac{a_4(\gamma) + ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}; & b_4(\gamma) &= \frac{a_4(\gamma) - ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

which satisfy also eq. (20), as a consequence of (16). From eqs. (15) and (25) we have, in the non-relativistic approximation:

$$(26) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = U_3(q) - iU_2(q), \\ \Phi_2(q) = U_4(q) + iU_1(q). \end{cases}$$

On the purely formal side, we note that $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ coincides, up to a $\sqrt{2}$ factor, with the pair of *large* eigenfunctions of eqs. (10), when interpreted in the usual way, that is with no reality restriction.

To prove this, it is enough to verify that the transformation $\psi = \frac{1-\rho_2\sigma_y}{\sqrt{2}}U$ allows one to go from the scheme (9) to the usual Dirac scheme ($\alpha = \rho_1\sigma$; $\beta = \rho_3$), so that, effectively:

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_1, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2;$$

notoriously, in the latter scheme, ψ_3 and ψ_4 are the large components. This relation clarifies the transformation law of Φ with respect to space rotations, but it has no meaning, obviously, with respect to general Lorentz transformations.

The existence of simple formulae such as (26) could lead one to suspect that, to a certain extent, the passage through plane waves is superfluous. As a matter of fact, such a passage is conceptually needed to obtain the cancellation of the *rest-energy half-quanta*. In fact, after such cancellation, the method of the energy is naturally given by:

$$(27) \quad H = \int \tilde{\Phi} \left(mc^2 + \frac{1}{2m}p^2 \right) \Phi dq,$$

to first approximation, and it differs in an essential way from (13).

3. As we have already said, the scheme (12) is not sufficient to describe charged particles; but, upon the introduction of a further quadruplet of real quantities V_r , analogous to the U_r , one re-obtains the usual electrodynamics, in a form symmetric with respect to the electron and positron. We consider, therefore, two sets of real quantities, representing the matter particles and the electromagnetic field, respectively. Quantities of the first kind are to be interpreted according to the scheme described in Sect. 1. Quantities of the second kind, *i.e.* the electromagnetic potentials φ and $A = (A_x, A_y, A_z)$, can be

interpreted as classical quantities, and have to be quantized according to the Heisenberg rule, based on the correspondence principle. The Maxwell and Dirac equations (with the above-mentioned restriction for the latter) can be obtained from a variational principle:

$$\delta \int L dq dt = 0$$

L being the sum of three terms:

$$L = L' + L'' + L'''.$$

The first term refers to the matter wave:

$$(28) \quad L' = i \frac{hc}{2\pi} \left\{ U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U + \right. \\ \left. + V^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] V \right\},$$

while the second describes the radiation field, which we suppose to be quantized according to the method of FERMI⁽⁶⁾:

$$(29) \quad L'' = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A \right)^2.$$

We must therefore impose the auxiliary condition

$$(30) \quad \frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A = 0.$$

The expression given in (29) differs from the one used by Fermi, but for integrable terms only. It leads to a definition of the momentum P_0 , conjugate to φ , such as to allow one to eliminate immediately one of the two longitudinal waves, without having to go through the plane-wave development; in this respect, it is completely immaterial whether the second term in the expression (29) for L'' is multiplied by an arbitrary, non-vanishing constant. As for L''' it must be so chosen that $\psi = U + iV$ obeys the Dirac equation (8) completed with the external field, *i.e.* the equation:

$$\left[\frac{W}{c} + \frac{e}{c} \varphi + \left(\alpha, p + \frac{e}{c} A \right) + \beta mc \right] \psi = 0.$$

In practice, this requirement leads to:

$$(31) \quad L''' = ieU^*[\varphi + (\alpha, A)]V - ieV^*[\varphi + (\alpha, A)]U.$$

⁽⁶⁾ E. FERMI, "Rend. Accad. Lincei", 9, 881 (1929).

Upon variation of the electromagnetic potentials, we obtain the following expressions for the charge and current densities:

$$(32) \quad \begin{cases} \rho = -ie(U^*V - V^*U) = -e \frac{\tilde{\psi}\psi - \psi^*\tilde{\psi}}{2}, \\ I = ie(U^*\alpha V - V^*\alpha U) = e \frac{\tilde{\psi}\alpha\psi - \psi^*\alpha\tilde{\psi}}{2}. \end{cases}$$

These expressions differ from the usual ones for *infinite constants* only. The cancellation of such infinite constants is required by the symmetry of the theory, which is already implicit in the form chosen for the variational principle; in fact, the exchange of U_r and V_r , which appear symmetrically in L' , is equivalent to changing sign to the electric charge.

U and V obey the anticommutation relations:

$$\begin{aligned} U_r(q)U_s(q') + U_s(q')U_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ V_r(q)V_s(q') + V_s(q')V_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) &= 0, \end{aligned}$$

which are equivalent to the usual Jordan-Wigner scheme, if we set $\psi = U + iV$. The electromagnetic potentials φ , A_x , A_y , A_z , on the other side, obey to the usual commutation relations with their conjugate momenta, e.g. $P_0(q)\varphi(q') - \varphi(q')P_0(q) = \frac{\hbar}{2\pi i}\delta(q - q')$, with:

$$(33) \quad \begin{cases} P_0 = -\frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \text{div } A \right), \\ P_x = -\frac{1}{4\pi c} E_x; \quad P_y = -\frac{1}{4\pi c} E_y; \quad P_z = -\frac{1}{4\pi c} E_z. \end{cases}$$

The energy is made up of three terms: $H = H' + H'' + H'''$ is derived from L' , according to the rules already illustrated. The second term is obtained from the classical rules: $H'' = \int [P_0\dot{\varphi} + (P, A) - L'']dq$, where $P = (P_x, P_y, P_z)$. As for H''' , it can be obtained from L''' , following either methods (in our case $H''' = -\int L'''dq$) as it must be, since L''' is a function of both the matter and the electromagnetic field variables. This, by the way, proves the necessity of the ansatz (5). The continuity equation (30), is obeyed at any time, if it holds initially together with the divergence equation $\text{div } E = 4\pi\rho$. It follows from (33) that the kinematics defined by the exchange rules has to be reduced by the use of the equations:

$$(34) \quad \begin{cases} P_0(q) = 0, \\ \text{div } P + \frac{1}{c}\rho = 0, \end{cases}$$

and therefore by assigning fixed values to two field quantities, with the corresponding indeterminacy in the conjugate variables. The *first* of (34) implies therefore, the elimination of P_0 and φ from the expression of H . The elimination is easily obtained by making use of (33), and one arrives, in this way, at the expression:

$$(35) \quad H = \int \left\{ \tilde{\psi} [-c(\alpha, p) - \beta mc^2] \psi - (A, I) + 2\pi cP^2 + \frac{1}{8\pi} |\text{rot } A|^2 \right\} dq.$$

As for relativistic invariance, we note that $\psi = U + iV$ obeys the Dirac equations, and that the Maxwell equations also hold, with charge and current densities which obey the relativistic transformation law. These two facts guarantee that the complete proof of the invariance of the theory is already implicit in the results of HEISENBERG and PAULI⁽⁷⁾. We turn now to the interpretation of the formalism.

4. Upon developing the U in the basis of the periodical functions considered before, and similarly for the V , we find as the obvious extension of (22), and after cancellation of the rest-energy half-quanta:

$$(36) \quad H' = \sum_{\gamma} c \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 \gamma^2} \sum_{r=1}^2 [\bar{B}_r(\gamma) B_r(\gamma) + \bar{B}'_r(\gamma) B'_r(\gamma)],$$

where B_r and B'_r refer to the development of U and V , respectively; B_r and B'_r and their conjugate variables obey the usual anticommutation relations. If, for each value of γ , we introduce four appropriate spin functions $\xi_s(\gamma)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) assuming four complex values and forming a unitary system, we can set:

$$(37) \quad \begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\gamma} \{ B_1(\gamma) \xi_1(\gamma) + B_2(\gamma) \xi_2(\gamma) + \bar{B}_1(-\gamma) \xi_3(\gamma) + \bar{B}_2(-\gamma) \xi_4(\gamma) \} f_{\gamma}(q), \\ V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\gamma} \{ B'_1(\gamma) \xi_1(\gamma) + B'_2(\gamma) \xi_2(\gamma) + \bar{B}'_1(-\gamma) \xi_3(\gamma) + \bar{B}'_2(-\gamma) \xi_4(\gamma) \} f_{\gamma}(q), \end{cases}$$

the following relations being, furthermore, satisfied:

$$(38) \quad \begin{cases} \xi_3(\gamma) = \bar{\xi}_1(-\gamma), \\ \xi_4(\gamma) = \bar{\xi}_2(-\gamma). \end{cases}$$

⁽⁷⁾ W. HEISENBERG and W. PAULI, "Z. Physik", 56, 1 (1929); 59, 168 (1930).

It follows from the expression (32) for the electric charge density that the total charge is given by:

$$(39) \quad Q = -\frac{ie}{2} \int [\bar{U}^*(q)V(q) - V^*(q)U(q)]dq = \\ = -\frac{ie}{2} \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^2 [B_r(\gamma)\bar{B}'_r(\gamma) + \bar{B}_r(\gamma)B'_r(\gamma) - \bar{B}'_r(\gamma)B_r(\gamma) - B'_r(\gamma)\bar{B}_r(\gamma)].$$

If we set:

$$(40) \quad C_r^{\text{el}} = \frac{B_r + iB'_r}{\sqrt{2}}; \quad C_r^{\text{pos}} = \frac{B_r - iB'_r}{\sqrt{2}}$$

we can transform the expressions (36) and (39) for the energy and charge into the form:

$$(41) \quad H' = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^2 (\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}})$$

$$(42) \quad Q = e \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^2 \left[-\left(\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} - \frac{1}{2} \right) + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}} - \frac{1}{2} \right] = \\ = e \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^2 \left(-\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}} \right).$$

The elimination of the *half-quanta of electricity* is, therefore, automatic, provided we perform the internal sum first. Equations (41) and (42) represent a set of oscillators which are equivalent to a double system of particles obeying the Fermi statistic, with rest mass m and charge $\pm e$; the variables C_r^{pos} refer to positrons and the C_r^{el} to electrons.

The elimination of the longitudinal electric field by the second equation in (34) is somewhat different in a symmetric theory because it is not possible to cast ρ , as it results from (32), in a diagonal form. The result of the elimination is well known in ordinary electrodynamics (though partially illusory because of convergence difficulties) where $\rho = -e\tilde{\psi}\psi$; but it is equally known if one starts from $\rho = e\psi^*\bar{\psi}$ because the latter position is fully equivalent to exchange the role of electron and positron, considering the latter as a real particle and the former as a positron "hole". It seems plausible that those matrix elements which maintain the same form in the two opposite theories remain the same in the symmetric theory.

We thus assume to have already eliminated the irrotational part of A and P . The expression (35) for H is modified in two ways: first by assuming that A and P in this expression represent only the divergence free part of such vectors; secondly by adding a term which represents the electrostatic energy. The latter term takes a different form in the ordinary theory (electron-electron hole) and in the opposite theory. Keeping the

interaction of each particle with itself, one has in the first theory:

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \tilde{\psi}(q)\psi(q)\tilde{\psi}(q')\psi(q')dqdq',$$

while in the second theory:

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \psi^*(q)\bar{\psi}(q)\psi^*(q')\bar{\psi}(q')dqdq'.$$

Using (37) and (40) one can express the electrostatic energy as a function of the C 's. The only terms which have given rise to physical applications are identical in the two theories: they are those which can be interpreted, from the particle viewpoint, as repulsion or attraction between distinct particles of the same or of the opposite type.

For what concerns the interaction with the radiation field, the only difference between the symmetric and the ordinary theory lies in the cancellation of undetermined constants, relative to the single oscillators, in the expression for the current density; again the formulae of interest for the applications remain unchanged.

Comment on the Scientific Paper no. 9 : "A symmetric theory of electrons and positrons".

Written in 1937, one year before his tragic disappearance, in a concise and elegant Italian language, this article probably represents the best long-lasting contribution of Ettore Majorana to particle physics.

The article tackles the problem of formulating the Dirac theory without the cumbersome sea of negative-energy states. In the usual formulation one would start from a highly asymmetric situation, to discover only at the end that there is a perfect symmetry between electrons and positrons. The symmetry is so little evident that Dirac himself tried at first to identify the positively charged particles, the holes, with protons!

Referring to the usual formulation, M. notes that:

"the prescriptions needed to cast the theory into a symmetric form, in conformity to its content, are however not entirely satisfactory because one always starts from an asymmetric form or because symmetric results are obtained after one applies appropriate procedures, such as the cancellation of divergent constants, that one should possibly avoid. For these reasons, we have attempted a new approach, which leads more directly to the desired result."

From these premises, M. formulates a field theory based on anticommuting variables, hence without classical interpretation, and derives the Dirac equation from a variational principle.

The electron is represented by a complex field, which can be divided into Hermitian and anti-Hermitian components. However, in the representation where the Dirac matrices are all imaginary (henceforth called the M. representation) each component "*can be considered, in itself, as the theoretical description of some material system, in conformity with the general methods of quantum mechanics.*"

M. promptly recognizes, of course, that we cannot avoid introducing both components for the electron, which admits a conserved charge. But the simplicity of the scheme leads him to speculate that his theory can find application to the case of electrically neutral particles.

"The advantage... is that there is no reason now to infer the existence of antineutrons or antineutrinos. The latter particles are introduced in the theory of positive β -ray emission; the theory, however, can be obviously modified so that the β -emission, both positive and negative, is always accompanied by the emission of a neutrino."

M. refers here to the theory of positive β -rays formulated two years before, in Rome, by Giancarlo Wick.

Unexpectedly, from a reformulation of the Dirac theory, a novel physical possibility emerges, which has since been the object of theoretical and experimental scrutiny. We have not succeeded, yet, to find a definitive answer to M.'s proposal.

The M. neutrino has met with alternating fortunes, somehow superimposing to the "two-component neutrino" theory, formulated by Herman Weyl a few years before, in 1929.

It is a fact that the neutral particles emitted in negative or positive β -decays behave differently: in the interaction with atomic nuclei, the former particles produce invariably positrons, the latter electrons. However, with a $V - A$ interaction, we can associate the different behaviour to the different helicity of the emitted neutral particle.

Since helicity is strictly conserved for massless particles, deviations from this pattern are due to terms in the amplitude of the order of the ratio: (neutrino mass)/(neutrino energy), which is unobservably small in all neutrino-induced reactions.

The Majorana nature of the neutrino can be tested in the so-called *neutrinoless double β -decays*. These are second-order processes in the Fermi theory, whereby a virtual neutrino of positive elicity is emitted, together with an electron, and reabsorbed as if it were a neutrino (negative elicity), with emission of a second electron. The overall process: $N^* \rightarrow N + 2e$, violates lepton number conservation and is proportional to the Majorana mass of the neutrino. The observation of neutrinoless double β -decay would be an evident proof that: "*there is no reason to infer... the existence of... antineutrinos.*"

Long considered as an exotic possibility, the M. neutrino has emerged, in our times, as the most natural explanation for the surprisingly small value of neutrino masses.

In addition, the non-conservation of a lepton number, L , leads to speculate that the decay of supermassive M. neutrinos in the primordial Universe may have given rise to an asymmetry in L , transformed in the presently observed baryon number asymmetry by virtue of $B - L$ conservation.

Several laboratories around the world host experiments to detect neutrinoless double β -decay, thus far with no success.

A new-generation experiment, CUORE, is in preparation in the INFN laboratory below the Gran Sasso Mountain in Central Italy. With dimensions never reached before, CUORE should put very stringent limits to the process... or maybe observe it.

I like to think that the answer to the question posed by Majorana more than half a century ago may be found precisely in our country giving, at the same time, a possible explanation to the dominance of matter over antimatter in our Universe, on which our very same existence depends.

LUCIANO MAIANI
Università di Roma "La Sapienza"

Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali(*)

NOTA DI ETTORE MAJORANA

“Scientia”, vol. 36, 1942, pp. 58-66.

Sunto. — La concezione deterministica della natura racchiude in sé una reale causa di debolezza nell'irrimediabile contraddizione che essa incontra con i dati più certi della nostra coscienza. G. SOREL tentò di comporre questo dissidio con la distinzione tra *natura artificiale* e *natura naturale* (quest'ultima acausale), ma negò così l'unità della scienza. D'altra parte l'analogia formale tra le leggi statistiche della fisica e quelle delle scienze sociali accreditò l'opinione che anche i fatti umani sottostassero a un rigido determinismo. È importante, quindi, che i principî della meccanica quantistica abbiano portato a riconoscere (oltre ad una certa assenza di oggettività nella descrizione dei fenomeni) il carattere statistico delle leggi ultime dei processi elementari. Questa conclusione ha reso sostanziale l'analogia tra fisica e scienze sociali, tra le quali è risultata un'identità di valore e di metodo.

(*) Questo articolo di ETTORE MAJORANA —l'insigne fisico teorico dell'Università di Napoli scomparso senza lasciar traccia di sé il 25 Marzo 1938— fu scritto originariamente per una rivista di sociologia. Ma non fu pubblicato, forse per quella scontrosa reticenza che aveva l'A. ad aprirsi con gli altri e che lo persuadeva troppo spesso a chiudere nel cassetto lavori anche importanti. Questo articolo c'è stato conservato dall'amorosa cura del fratello e viene qui presentato non solo per l'interesse in sé dell'argomento, ma anche sovra tutto perché ci mostra un lato della ricca personalità del MAJORANA, che tanto attraeva coloro che lo conoscevano. Pensatore che univa a un acuto senso realistico uno spirito estremamente critico, ma non scettico, egli assume qui una chiara posizione di fronte al dibattuto problema del valore statistico delle ultime leggi fisiche. Questo che a molti sembra un difetto, come una denuncia d'indeterminismo nel divenire della natura, è invece per il MAJORANA un motivo per rivendicare l'intrinseca importanza del metodo statistico, sinora nella sua essenza applicato solo nelle scienze sociali e che nella nuova interpretazione delle leggi fisiche ritrova intero il suo significato originario.

GIOVANNI GENTILE jr.

Lo studio dei rapporti, veri o supposti, che passano fra la fisica e le altre scienze, ha sempre rivestito un notevole interesse in ragione dell'influenza speciale che la fisica ha esercitato nei tempi moderni sul generale indirizzo del pensiero scientifico. È noto che le leggi della meccanica, in modo particolare, sono apparse lungamente come il tipo insuperabile delle nostre conoscenze della natura, e si è anzi creduto da molti che a tal tipo, in ultima si sarebbero dovute ricondurre anche le nozioni imperfette fornite dalle altre scienze. Valga ciò di giustificazione allo studio che intraprendiamo.

1. LA CONCEZIONE DELLA NATURA SECONDO LA FISICA CLASSICA

Il credito eccezionale goduto dalla fisica deriva evidentemente dalla scoperta delle così dette leggi esatte, consistenti in formule relativamente semplici che, escogitate originariamente in base a indicazioni frammentarie e approssimative dell'esperienza, si rivelano in seguito di universale validità, sia che vengano applicate a nuovi ordini di fenomeni, sia che il progressivo affinamento dell'arte sperimentale le sottoponga a un controllo sempre più rigoroso. È a tutti noto che secondo la concezione fondamentale della meccanica classica il movimento di un corpo materiale è interamente determinato dalle condizioni iniziali (posizione e velocità) in cui il corpo si trova e dalle forze che agiscono su di esso. Sulla natura e misura delle forze che si possono creare nei sistemi materiali, le leggi generali della meccanica stabiliscono però naturalmente solo qualche condizione, o limitazione, che deve essere sempre soddisfatta. Tale carattere ha per esempio il principio dell'uguaglianza fra l'azione e la reazione al quale si sono aggiunte, in epoca meno remota, altre regole generali, come quelle riguardanti i sistemi vincolati (principio dei lavori virtuali) o le reazioni elastiche, e ancora più recentemente con l'interpretazione meccanica del calore, anche il principio della conservazione dell'energia in quanto principio generale della meccanica. A parte tali indicazioni generali, è però compito della fisica speciale lo scoprire volta per volta quanto occorre per l'uso effettivo dei principi della dinamica, cioè la conoscenza di tutte le forze in gioco.

In un caso tuttavia è stato possibile trovare l'espressione generale delle forze che nascono fra i corpi materiali: nel caso cioè che questi siano isolati e agiscano quindi reciprocamente solo a *distanza*. In questo caso, a prescindere dalle forze elettromagnetiche scoperte posteriormente e che si manifestano però solo in particolari condizioni, l'unica forza agente si riduce alla gravitazione universale, la cui nozione fu suggerita a NEWTON dall'analisi matematica delle leggi di KEPLERO. La legge di NEWTON è tipicamente applicabile allo studio dei movimenti degli astri che, essendo separati da immensi spazi vuoti, possono effettivamente influenzarsi a vicenda solo per un'apparente azione a distanza. Come è noto, tale legge è realmente sufficiente per prevedere in ogni aspetto e con esattezza meravigliosa tutto il complesso svolgimento del nostro sistema planetario. Una sola minuta eccezione, riguardante lo spostamento secolare che subisce il perielio di Mercurio, costituisce una delle maggiori prove sperimentali della recente teoria della relatività generale.

Il successo sensazionale della meccanica applicata all'astronomia ha incoraggiato naturalmente la supposizione che anche i fenomeni più complicati dell'esperienza comune debbono infine ricondursi a un meccanismo simile e solo alquanto più generale della legge di gravitazione. Secondo tale modo di vedere, che ha dato luogo alla concezione meccanicistica della natura, tutto l'universo materiale si svolge obbedendo a una legge inflessibile, in modo che il suo stato in un certo istante è interamente determinato dallo stato in cui si trovava nell'istante precedente; segno che tutto il futuro è implicito nel presente, nel senso che può essere previsto con assoluta certezza purché lo stato attuale dell'universo sia interamente noto. Tale concezione pienamente deterministica della natura ha avuto in seguito numerose conferme; gli sviluppi ulteriori della fisica, dalla scoperta delle leggi dell'elettromagnetismo fino alla teoria della relatività, hanno suggerito infatti un progressivo allargamento dei principî della meccanica classica, ma hanno, d'altra parte, vigorosamente confermato il punto essenziale, cioè la completa causalità fisica. Non è contestabile che si debba al determinismo il merito principale e quasi esclusivo di aver reso possibile il grandioso sviluppo moderno della scienza, anche in campi lontanissimi dalla fisica. Eppure il determinismo, che non lascia alcun posto alla libertà umana e obbliga a considerare come illusori, nel loro apparente finalismo, tutti i fenomeni della vita, racchiude una reale causa di debolezza: la contraddizione immediata e irrimediabile con i dati più certi della nostra coscienza. Come il suo effettivo e, secondo ogni verosimiglianza, definitivo superamento sia avvenuto proprio nella fisica in questi ultimi anni, diremo solo più innanzi; sarà anzi nostro scopo ultimo l'illustrare il rinnovamento che il concetto tradizionale delle leggi statistiche deve subire in conseguenza del nuovo indirizzo seguito dalla fisica contemporanea. Ma per il momento vogliamo ancora attenerci alla concezione classica della fisica; non solo per il suo enorme interesse storico, ma anche perché essa è ancora la sola largamente conosciuta oltre la cerchia degli specialisti.

Prima di chiudere questa parte introduttiva, crediamo opportuno ricordare che le critiche al determinismo si sono moltiplicate, soprattutto in tempi a noi abbastanza vicini. La reazione filosofica, quando è stata felice, non è uscita dal suo campo, lasciando sostanzialmente intatto, se pur circoscritto nella sua importanza, il problema propriamente scientifico. Un tentativo di risolvere quest'ultimo troviamo invece in G. SOREL⁽¹⁾ che rappresenta la corrente pragmatistica o pluralistica. Secondo i partigiani di questo movimento una effettiva eterogeneità dei fenomeni naturali esclude che se ne possa avere una conoscenza unitaria. Ogni principio scientifico sarebbe quindi applicabile a un determinato ambito di fenomeni, senza poter mai aspirare ad una validità universale. G. SOREL svolge in modo particolare la critica del determinismo affermando che questo riguarderebbe soltanto i fenomeni che egli chiama della *natura artificiale*, caratterizzati dal fatto che non sono accompagnati da una apprezzabile *degradazione* di energia (nel senso del secondo principio della termodinamica). Tali fenomeni hanno luogo talvolta spontaneamente in natura, specie nel campo astronomico, e costituiscono allora materia di semplice osservazione; ma più frequentemente vengono provocati nei laboratori dagli

⁽¹⁾ G. SOREL, *De l'utilité du pragmatisme*, Cap. IV, Parigi 1921.

sperimentatori i quali pongono una cura particolare nell'eliminazione delle resistenze passive. Gli altri fenomeni, quelli cioè dell'esperienza comune o della *natura naturale*, nei quali entrano in gioco le resistenze passive, non sarebbero dominati da leggi definite, ma dipenderebbero in misura più o meno ampia dal caso. Il SOREL si richiama esplicitamente ad un principio metafisico di G. B. VICO. Non vogliamo qui discutere l'accentuazione arbitraria data a un particolare aspetto della scienza quale si presentava in un'epoca che non è più la nostra; dobbiamo invece rilevare che il principio pragmatista di giudicare le dottrine scientifiche in base alla loro reale utilità, non giustifica in alcun modo la pretesa di condannare l'ideale dell'unità della scienza che si è rivelata più volte un efficace stimolo al progresso delle idee.

2. IL SIGNIFICATO CLASSICO DELLE LEGGI STATISTICHE E LE STATISTICHE SOCIALI

Per bene intendere il significato delle leggi statistiche secondo la meccanica, bisogna richiamarsi ad una ipotesi sulla struttura della materia che, già familiare agli antichi, entrò effettivamente nel dominio della scienza ai primi del secolo scorso per opera di DALTON; questi riconobbe per primo in tale ipotesi la naturale spiegazione delle leggi generali della chimica da poco messe in luce. Secondo la moderna teoria atomica che è stata definitivamente confermata con i metodi propri della fisica, esistono in natura tante specie di particelle elementari indivisibili, o *atomi*, quanti sono i corpi chimici semplici; dall'unione di due o più atomi di specie uguale o diversa, talvolta da atomi isolati, risultano le *molecole* le quali sono le ultime particelle capaci di una esistenza indipendente in cui si può suddividere una sostanza chimicamente definita. Le singole molecole (e talvolta anche gli atomi all'interno delle molecole) lungi dall'occupare una posizione fissa, sono animate da un movimento rapidissimo di traslazione e di rotazione su se stesse. La struttura molecolare dei corpi gassosi è particolarmente semplice. Infatti nei gas in condizioni ordinarie le singole molecole si possono considerare come particolarmente indipendenti e a distanze reciproche, considerevoli rispetto alle loro ridottissime dimensioni; segue, per il principio di inerzia, che il loro moto di traslazione è rettilineo e uniforme, subendo modificazioni quasi istantanee nella direzione e nella misura della velocità solo in occasione di urti reciproci. Se supponiamo di conoscere esattamente le leggi che regolano l'influenza mutua delle molecole, dobbiamo attenderci, secondo i principi generali della meccanica, che basti *inoltre* conoscere nell'istante iniziale la disposizione di tutte le molecole e le loro velocità di traslazione e di rotazione, per poter prevedere *in principio* (se anche cioè a mezzo di calcoli troppo complessi per venire praticamente realizzati) quali saranno le esatte condizioni del sistema dopo un certo tempo. L'uso dello schema deterministico proprio della meccanica subisce tuttavia una reale limitazione di principio quando teniamo conto che i metodi *ordinari* di osservazione non sono in grado di farci conoscere esattamente le condizioni istantanee del sistema, ma ci danno solo un certo numero di informazioni globali. Dato, ad esempio, il sistema fisico risultante da una certa quantità di un determinato gas, basta conoscerne la pressione e la densità perché risultino determinate tutte quelle altre grandezze, come temperatura, coefficiente di viscosità, ecc., che potrebbero essere

oggetto di particolari misure. In altri termini il valore della pressione e della densità bastano in questo caso a determinare interamente lo stato del sistema *dal punto di vista macroscopico*, pur non essendo evidentemente sufficienti a stabilire in ogni istante la sua esatta struttura interna, cioè la distribuzione delle posizioni e velocità di tutte le molecole.

Per esporre con chiarezza e brevità e senza alcun apparato matematico, la natura del rapporto che passa fra *stato macroscopico* (A) e stato reale (a) di un sistema, e per trarne alcune deduzioni, dobbiamo sacrificare alquanto la precisione, pur evitando di alterare in modo essenziale la vera sostanza dei fatti. Dobbiamo dunque intendere che allo stato apparente o macroscopico A corrisponda un gran numero di possibilità effettive $a, a', a'' \dots$ tra le quali le nostre osservazioni non ci permettono di distinguere. Il numero N di queste possibilità interne secondo le concezioni propriamente classiche sarebbe naturalmente infinito, ma la teoria dei quanti ha introdotto nella descrizione dei fenomeni naturali un'essenziale discontinuità in virtù della quale il numero (N) di tali possibilità nella struttura intima di un sistema materiale è realmente *finito*, sebbene naturalmente grandissimo. Il valore di N dà una misura del grado di indeterminazione *nascosta* del sistema; è però praticamente preferibile considerare una grandezza proporzionale al suo logaritmo

$$S = K \log N$$

K essendo la costante universale di Boltzmann determinata in modo che S coincida con una grandezza fondamentale, già nota, della termodinamica: l'*entropia*. L'entropia si presenta in realtà come una grandezza fisica al pari del peso, dell'energia ecc., sopra tutto perché come queste altre grandezze gode della proprietà additiva: cioè la entropia di un sistema risultante da più parti indipendenti è uguale alla somma delle entropie delle singole parti. Per dimostrarlo, basta osservare che il numero di possibilità latenti di un sistema composto è uguale evidentemente al prodotto dei numeri analoghi relativi alle parti costituenti; e tener presente d'altra parte la nota regola elementare che stabilisce la corrispondenza fra il prodotto di due o più numeri e la somma dei rispettivi logaritmi.

Sul modo di determinare il complesso di configurazioni interne $a, a', a'' \dots$ che corrisponde allo stato macroscopico A , non sorgono in genere difficoltà. Si può invece discutere se tutte le singole possibilità $a, a', a'' \dots$ si debbano o no riguardare come egualmente probabili. Orbene, secondo l'ipotesi ergodica o quasi ergodica, che si ha ragione di credere generalmente verificata, se un sistema persiste *indefinitamente* in uno stato A , allora si può affermare che esso passa un'eguale frazione del suo tempo in ciascuna delle configurazioni $a, a', a'' \dots$; si è così condotti a considerare effettivamente come egualmente probabili tutte le possibili determinazioni interne. È questa in realtà una nuova ipotesi, poiché l'universo, lungi dal permanere indefinitamente nello stesso stato, va soggetto a trasformazioni continue. Ammetteremo dunque come ipotesi di lavoro estremamente plausibile, ma le cui conseguenze lontane potrebbero anche talvolta non essere verificate, che tutti i possibili stati interni di un sistema in condizioni fisiche determinate siano a priori egualmente probabili. Risulta così interamente definito il *complesso statistico* associato ad ogni stato macroscopico A .

Il problema generale della meccanica statistica si può così riassumere: essendo definito statisticamente, come si è detto, lo stato A iniziale del sistema quali previsioni sono possibili in riguardo al suo stato al tempo t ? Può apparire a prima vista che questa definizione sia troppo ristretta, poiché oltre al problema propriamente dinamico altri se ne possono considerare di carattere *statico*; ad es. qual'è la temperatura di un gas di cui siano noti le pressioni e la densità? E così in tutti i casi che si voglia da alcune caratteristiche di un sistema, sufficienti a definirne lo stato, dedurne altre che possano interessare. La distinzione si può peraltro formalmente ignorare; incorporando infatti nel sistema appropriati strumenti di misura, ci si può sempre ricondurre al caso precedente.

Supponiamo dunque che lo stato iniziale del sistema in esame risulti da un complesso statistico $A = (a, a', a'' \dots)$ di casi possibili e, per quanto si è detto, egualmente probabili. Ciascuna di queste determinazioni concrete si modifica nel corso del tempo secondo una legge che, in accordo con i principî generali della meccanica, dobbiamo ancora ritenere rigidamente causale, cosicché dopo un certo tempo si passa dalla serie $a, a', a'' \dots$ a un'altra serie ben determinata $\beta, \beta', \beta'' \dots$; il complesso statistico $(\beta, \beta', \beta'' \dots)$, che è anch'esso costituito di N elementi egualmente probabili come il complesso originario A (teorema di Liouville), definisce tutte le possibili previsioni sullo svolgimento del sistema. Per ragioni che solo un'analisi matematica complessa potrebbe precisare, accade in generale che tutti i casi semplici appartenenti alla serie $\beta, \beta', \beta'' \dots$ *salvo un numero del tutto insignificante di eccezioni*, costituiscono *in tutto o in parte* un nuovo complesso statistico B definito come A da uno stato *macroscopicamente* ben determinato. Possiamo allora enunciare la *legge statistica* secondo la quale vi è la pratica certezza che il sistema debba passare da A in B . Per quanto si è detto, il complesso statistico B è almeno così ampio come A , cioè contiene un numero di elementi non inferiore a N ; segue che l'entropia di B è uguale a quella di A o *maggiore*. Durante qualunque trasformazione che si compia *in accordo con le leggi statistiche* si ha quindi costanza o aumento di entropia, mai diminuzione; è questo il fondamento statistico del famoso secondo principio della termodinamica.

È notevole che dal punto di vista pratico il passaggio da A a B si può considerare come certo; ciò che spiega come storicamente le leggi statistiche siano state considerate dapprima altrettanto fatali delle leggi della meccanica e solo per il progresso dell'indagine teorica se ne sia in seguito riconosciuto il vero carattere. Le leggi statistiche abbracciano gran parte della fisica. Fra le applicazioni più note ricordiamo: l'equazione di stato dei gas, la teoria della diffusione, della conducibilità termica, della viscosità, della pressione osmotica e molte altre consimili. Un posto a parte merita la teoria statistica dell'irraggiamento che introduce per la prima volta nella fisica il *discontinuo* simboleggiato della costante di PLANCK. Ma vi è inoltre una intera branca della fisica, la *termodinamica*, i cui principî benché fondati direttamente sull'esperienza, si possono ricondurre alle nozioni generali della meccanica statistica. Per quanto abbiamo fatto finora si può così riassumere il significato delle leggi statistiche secondo la fisica classica: 1°) i fenomeni naturali obbediscono ad un determinismo assoluto; 2°) l'osservazione *ordinaria* non permette di riconoscere esattamente lo stato interno di un corpo ma solo di stabilire un complesso innumerevole di possibilità

indistinguibili; 3°) stabilite delle ipotesi plausibili sulla probabilità delle diverse possibilità e supposte valide le leggi della meccanica, il calcolo delle probabilità permette la previsione più o meno certa dei fenomeni futuri. Possiamo ormai esaminare il rapporto che passa fra le leggi stabilite dalla meccanica classica e quelle regolarità francamente empiriche che sono note con lo stesso nome in modo particolare nelle scienze sociali.

Bisogna anzitutto convincersi che l'analogia formale non potrebbe essere più stretta. Quando si enuncia, ad es., la legge statistica: "In una società moderna di tipo europea il coefficiente annuo di nuzialità è prossimo a 8 per 1000 abitanti", è abbastanza chiaro che il sistema su cui dobbiamo eseguire le nostre osservazioni è definito solo in base a certi caratteri globali rinunciando deliberatamente a indagare tutti quei dati ulteriori (come per es. la biografia di tutti gli individui che compongono la società in esame) la cui conoscenza sarebbe indubbiamente utile per prevedere il fenomeno con maggiore precisione e sicurezza di quanto non consenta la generica legge statistica; non altrimenti allorché si definisce lo stato di un gas semplicemente dalla pressione e dal volume, si rinuncia deliberatamente a investigare le condizioni iniziali di tutte le singole molecole. Una differenza sostanziale si potrebbe invece scorgere nel carattere matematicamente definito dalle leggi statistiche della fisica a cui fa riscontro quello chiaramente empirico delle leggi statistiche sociali; ma è plausibile attribuire l'empirismo delle statistiche sociali (intendiamo precisamente l'incostanza dei loro risultati *oltre la parte spettante al caso*) alla complessità dei fenomeni che essi considerano, per cui non è possibile definire esattamente le condizioni o il contenuto della legge. D'altra parte anche la fisica conosce le leggi empiriche quando studia fenomeni di puro interesse applicativo; tali ad es., le leggi sull'attrito fra corpi solidi, o sulle proprietà magnetiche dei vari tipi di ferro e altri simili. Infine si potrebbe dare speciale importanza alla differenza nei metodi di rilevazione che nella fisica sono globali (così basta la lettura di uno strumento di misura per conoscere la pressione di un gas benché essa derivi dalla somma degli impulsi indipendenti che le singole molecole trasmettono alle pareti) mentre nelle statistiche sociali si registrano di solito i fatti individuali; non è però neanche questa un'antitesi assoluta, come prova la possibilità dei metodi più vari di rilevazione indiretta. Ammesse così le ragioni che fanno credere all'esistenza di una reale analogia fra le leggi statistiche fisiche e sociali, siamo indotti a ritenere plausibile che, come le prime presuppongono logicamente un rigido determinismo, così le ultime siano da parte loro la prova più diretta che il più assoluto determinismo governa anche i fatti umani; argomento che ha avuto tanto miglior fortuna in quanto, come abbiamo detto in principio, si era già manifestata per ragioni indipendenti la tendenza a vedere nella causalità della fisica classica un modello di valore universale. Sarebbe qui fuor di luogo riprendere discussioni antiche e mai concluse, ma crediamo di potere ricordare, come fatto generalmente ammesso, che la non avvenuta conciliazione fra le nostre contrastanti intuizioni della natura ha lungamente pesato sul pensiero moderno e sui valori morali. Non va quindi accolto semplicemente come una curiosità scientifica l'annuncio che negli ultimissimi anni la fisica è stata costretta ad abbandonare il suo indirizzo tradizionale rigettando, in maniera verosimilmente definitiva, il determinismo assoluto della meccanica classica.

3. LE NUOVE CONCEZIONI DELLA FISICA

È impossibile esporre con qualche compiutezza in poche righe lo schema matematico e il contenuto sperimentale della meccanica quantistica⁽²⁾. Ci limiteremo pertanto a qualche accenno. Vi sono dei fatti sperimentali noti da gran tempo (fenomeni di interferenza) che depongono irrefutabilmente a favore della teoria ondulatoria della luce; altri fatti scoperti di recente (effetto Compton) suggeriscono, al contrario, non meno decisamente l'opposta teoria corpuscolare. Tutti i tentativi di comporre la contraddizione nel quadro della fisica classica sono rimasti assolutamente infruttuosi; il che può anche sembrare poco significativo. Senonché di tali fatti inesplicabili, e di altri non meno inesplicabili e della più diversa natura, e infine di *quasi tutti* i fenomeni noti ai fisici e finora insufficientemente spiegati si è trovata realmente da pochi anni la spiegazione unica e meravigliosamente semplice: quella contenuta nei principi della meccanica quantistica. Questa straordinaria teoria è dunque così solidamente fondata nell'esperienza come forse nessun'altra fu mai; le critiche a cui essa fu ed è assoggettata non possono quindi concernere in alcun modo la legittimità del suo uso per l'effettiva previsione dei fenomeni, ma soltanto l'opinione, condivisa dai più, che il nuovo indirizzo da essa segnato debba conservarsi, e anzi ancora accentuarsi, nei futuri sviluppi della fisica. Gli aspetti caratteristici della meccanica quantistica, in quanto essa si differenzia dalla meccanica classica sono i seguenti:

- a) non esistono in natura leggi che esprimano una successione fatale di fenomeni; anche le leggi ultime che riguardano i fenomeni elementari (sistemi atomici) hanno carattere statistico, permettendo di stabilire soltanto la *probabilità* che una misura eseguita su un sistema preparato in un dato modo dia un certo risultato, e ciò qualunque siano i mezzi^(*) di cui disponiamo per determinare con la maggior esattezza possibile lo stato iniziale del sistema. Queste leggi statistiche indicano un reale difetto di determinismo e non hanno nulla di comune con le leggi statistiche classiche nelle quali l'incertezza dei risultati deriva dalla volontaria rinuncia, per ragioni pratiche, a indagare nei più minuti particolari le condizioni iniziali dei sistemi fisici. Vedremo più avanti un esempio ben noto di questo nuovo tipo di leggi naturali.
- b) una certa mancanza di *oggettività* nella descrizione dei fenomeni. Qualunque esperienza eseguita in un sistema atomico esercita su di esso una perturbazione finita che non può essere, per ragioni di principio, eliminata o ridotta. Il risultato di qualunque misura sembra perciò riguardare piuttosto lo stato in cui il sistema viene portato nel corso dell'esperienza stessa che non quello inconoscibile in cui si

⁽²⁾ Il lettore che desideri approfondire le sue conoscenze in tale materia girando, finché si può, lo scoglio matematico, può consultare W. HEISENBERG, *Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, Lipsia 1930.

^(*) In "Scientia" è erroneamente stampato "prezzi". (Nota del Curatore, vedi anche E. AMALDI, *op. cit.*)

trovava prima di essere perturbato. Questo aspetto della meccanica quantistica è senza dubbio più inquietante, cioè più lontano dalle nostre intuizioni ordinarie, che non la semplice mancanza di determinismo.

Fra le leggi probabilistiche riguardanti i fenomeni elementari è nota da più antica data quella che regola i processi radioattivi.

Ogni atomo di una sostanza radioattiva ha una probabilità definita mdt di trasformarsi nel tempuscolo dt in seguito all'emissione, o di una particella α (nucleo di elio) ovvero in altri casi di una particella β (elettrone). Il *tasso di mortalità* m è costante, cioè indipendente dalla età dell'atomo, ciò che dà una forma particolare (esponenziale) alla *curva di sopravvivenza*; la vita media vale $1/m$ e in modo elementare si può determinare analogamente la *vita probabile*, chiamata talvolta *periodo di trasformazione*. Entrambe sono indipendenti dall'età dell'atomo che non manifesta del resto per alcun altro segno un reale invecchiamento con il progredire del tempo. Esistono vari metodi per l'osservazione, o anche per la registrazione automatica delle singole trasformazioni che avvengono nel seno di una sostanza radioattiva, ed è stato quindi possibile verificare, mediante dirette rivelazioni statistiche e applicazioni del calcolo della probabilità, che i singoli atomi radioattivi non subiscono alcuna influenza reciproca o esterna per quanto riguarda l'istante della trasformazione; infatti il numero delle disintegrazioni che hanno luogo in un certo intervallo di tempo è soggetto a fluttuazioni dipendenti esclusivamente dal caso, cioè dal carattere probabilistico della legge individuale di trasformazione.

La meccanica quantistica ci ha insegnato a vedere nella legge esponenziale delle trasformazioni radioattive una legge elementare non riducibile ad un più semplice meccanismo causale. Naturalmente anche le leggi statistiche note alla meccanica classica e riguardanti *sistemi complessi*, conservano la loro validità secondo la meccanica quantistica. Questa modifica peraltro le regole per la determinazione delle configurazioni interne, e in due modi diversi, a seconda della natura dei sistemi fisici, dando luogo rispettivamente alle teorie statistiche di BOSE-EINSTEIN, o di FERMI. Ma l'introduzione nella fisica di un nuovo tipo di legge statistica, o meglio semplicemente probabilistica, che si nasconde, in luogo del supposto determinismo, sotto le leggi statistiche ordinarie obbliga a rivedere le basi dell'analogia che abbiamo stabilita più sopra con le leggi statistiche sociali. È indiscutibile che il carattere statistico di queste ultime deriva almeno in parte dalla maniera in cui vengono definite le condizioni dei fenomeni: maniera generica, cioè propriamente statistica, e tale da permettere un complesso innumerevole di possibilità concrete differenti. D'altra parte se ricordiamo quanto si è detto più sopra sulle *tavole di mortalità* degli atomi radioattivi siamo indotti a chiederci se non esista anche qui un'analogia reale con i fatti sociali che si descrivono con linguaggio alquanto simile.

Qualche cosa a prima vista sembra escluderlo; la disintegrazione di un atomo è un fatto semplice, imprevedibile, che avviene improvvisamente e isolatamente dopo un'attesa talvolta di migliaia e perfino di miliardi di anni; mentre niente di simile accade per i fatti registrati dalle statistiche sociali. Questa non è però un'obiezione insormontabile.

La disintegrazione di un atomo radioattivo può obbligare un contatore automatico a registrarlo con effetto meccanico, reso possibile da adatta amplificazione. Bastano

quindi comuni artifici di laboratorio per preparare una catena comunque complessa e vistosa di fenomeni che sia *comandata* dalla disintegrazione accidentale di un solo atomo radioattivo. Non vi è nulla dal punto di vista strettamente scientifico che impedisca di considerare come plausibile che all'origine di avvenimenti umani possa trovarsi un fatto vitale ugualmente semplice, invisibile e imprevedibile. Se è così, come noi riteniamo, le leggi statistiche delle scienze sociali vedono accresciuto il loro ufficio che non è soltanto quello di stabilire empiricamente la risultante di un gran numero di cause sconosciute, ma soprattutto di dare della realtà una testimonianza immediata e concreta. La cui interpretazione richiede un'arte speciale, non ultimo sussidio dell'arte di governo.

Commento alla Nota Scientifica n. 10: “Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali”.

Majorana pubblicò nove articoli prima della sua scomparsa mentre un decimo articolo, il cui manoscritto fu trovato dal fratello di Majorana tra le sue carte, fu pubblicato nel 1942 dopo la sua scomparsa nella rivista internazionale *Scientia* grazie all’interessamento del suo amico Giovanni Gentile jr.

Questo articolo è piuttosto speciale sotto diversi aspetti. Nella presentazione fatta per *Scientia*, Giovanni Gentile jr. affermò che l’articolo era stato originariamente scritto per una rivista di sociologia. Questo articolo intendeva quindi presentare il punto di vista di un fisico circa il valore delle leggi statistiche in fisica e nelle scienze sociali a studiosi di altre discipline come la sociologia e l’economia. Nel suo articolo, Majorana presenta la meccanica quantistica come una teoria fondamentale e di completo successo nel descrivere i processi che coinvolgono particelle ed atomi. Egli considera la meccanica quantistica una teoria statistica irriducibile in quanto la teoria non è in grado di descrivere ad un livello deterministico l’evoluzione di una *singola* particella (o di un *singolo* atomo) caratterizzata in una precisa condizione. Come esempio di impossibilità di una descrizione deterministica nell’evoluzione temporale di un singolo sistema fisico, Majorana discute il caso del decadimento di un atomo radioattivo. Questa mancanza di determinismo a livello di un sistema fisico elementare motiva Majorana a suggerire una analogia formale fra le leggi statistiche osservate in fisica e nelle scienze sociali. Nel suo articolo egli afferma che “Questa conclusione ha reso sostanziale l’analogia tra fisica e scienze sociali, tra le quali è risultata un’identità di valore e di metodo”.

Nella nota biografica e scientifica pubblicata nel testo a cura di Edoardo Amaldi⁽¹⁾, l’Autore afferma che probabilmente Majorana scrisse questo articolo nel periodo tra il 1933 ed il 1937 dopo il suo viaggio a Lipsia e Copenhagen del 1933. Sappiamo dai ricordi di Amaldi che dopo il ritorno a Roma nell’autunno del 1933 il suo coinvolgimento nella fisica teorica declinò fino al 1937. Durante questo periodo Ettore Majorana si interessava

⁽¹⁾ E. AMALDI, *op. cit.*

di economia politica, di politica, delle flotte di diversi paesi e dei loro rapporti di forza e di problematiche filosofiche.

In questo articolo è presente una natura pionieristica sia da una prospettiva fisica che economica. Dal punto di vista della fisica, Majorana asserisce che la meccanica quantistica impone una descrizione statistica ad eventi che coinvolgono singole entità elementari. Egli prende una chiara posizione circa la natura statistica della teoria che ritiene irriducibile in termini di una sottostante teoria deterministica. Dal punto di vista dell'economia e delle scienze sociali, c'è l'osservazione che le leggi statistiche costituiscono strumenti d'indagine nella modellizzazione economica e sociale e sono caratterizzate dallo stesso stato epistemologico di leggi probabilistiche irriducibili come la meccanica quantistica. Va notato che questa posizione culturale non era certamente maggioritaria fra gli studiosi del secolo scorso in entrambe le discipline considerate. Infatti durante gli anni trenta del secolo scorso, le interazioni fra gli studiosi di economia e fisica erano sviluppate sotto il paradigma della meccanica dei corpi celesti e quindi sotto un paradigma di completo determinismo (la sola eccezione a questo approccio fu quello perseguito da Louis Bachelier con la descrizione stocastica dell'evoluzione temporale dei prezzi di un bene finanziario che in quel periodo non ebbe alcun impatto sull'accademia⁽²⁾). Questa interazione ha riguardato lo sviluppo della teoria dell'equilibrio generale perseguita da Walras, Pareto, Schlesinger e Wald. L'enfasi di Majorana sulla natura intrinsecamente statistica dei processi che descrivono fenomeni quantistici lo ha portato a supportare l'idea che leggi statistiche possano essere incorporate nel processo di modellizzazione scientifica di fenomeni sociali.

La fisica può certamente beneficiare di una più profonda comprensione di ruolo, necessità e peculiarità delle leggi statistiche presenti in questa disciplina. Alcune delle leggi statistiche sono in seguito reinterpretate in termini di leggi deterministiche più fondamentali. Tuttavia ci sono casi dove una tale riduzione sembra essere impossibile. Uno di questi casi è proprio quello della meccanica quantistica e altri esempi, successivi all'epoca che vide Majorana attivo, riguardano argomenti della teoria dei sistemi dinamici e della teoria dei fenomeni critici.

Riassumendo, il decimo articolo di Majorana solleva la necessità di focalizzare l'attenzione di varie discipline sul valore e sulla natura delle leggi statistiche. Dalla fisica alla biologia ed alle scienze sociali, diverse discipline scientifiche presentano leggi statistiche e gli studiosi hanno la necessità di riflettere circa il loro ruolo e valore in ogni disciplina. Majorana prese il punto di vista che la meccanica quantistica implica che una descrizione scientifica senza leggi di natura statistiche è impossibile a livello di descrizione di processi elementari. Oggi si sente ancora la necessità di valutare lo stato delle leggi statistiche nelle diverse discipline e di considerare le procedure di validazione che sono più appropriate per questo tipo di leggi e per il loro contenuto di conoscenza.

(²) L. BACHELIER, *Théorie de la spéculation*, Ph.D. Thesis in mathematics, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III-17 (1900) 21–86.

Desideriamo concludere questa breve nota affermando che, a nostro parere, Ettore Majorana merita oggi un profondo tributo ed una attenzione non solo per i suoi eccezionali risultati ottenuti nella fisica teorica ma anche per le sue opinioni ancora originali e attuali sugli aspetti essenziali, sull'importanza e sul ruolo delle leggi statistiche in fisica ed in altre discipline come le scienze sociali.

R. N. MANTEGNA
Università di Palermo

The value of statistical laws in physics and social sciences^(*)^(**)

ETTORE MAJORANA

Summary. — The deterministic conception of nature implies in itself a real cause of weakness in the irremediable contradiction that it faces with the most certain data of our consciousness. G. SOREL attempted to compose this disagreement with the distinction between *artificial nature* and *natural nature* (this last acausal), but in this way he denied the unity of science. On the other hand, the formal analogy between the statistical laws of physics and the ones of social sciences credited the opinion that human facts also undergo a rigid determinism. It is therefore important that quantum mechanics principles have brought to recognize the statistical character of basic laws of elementary processes, in addition to a certain absence of objectiveness in the description of phenomena. This conclusion has made essential the analogy between physics and social sciences, between which it turned out an identity of value and method.

(*) This article of ETTORRE MAJORANA —the great theoretical physicist of Naples University who went missing on 25 March 1938— was originally written for a sociology journal. It was not published perhaps due to the reticence that the author had in interacting with others. Reticence that convinced him to put important papers inside a drawer too often. This article has been conserved by the dedicated care of his brother and it is presented here not only for the intrinsic interest of the topic but above all because it shows us one aspect of the rich personality of MAJORANA which so much impressed people who knew him, a thinker with a sharp realistic sense and with an extremely critical but not skeptical mind. He takes here a clear position concerning the debated problem of the statistical value of the basic physics law. This aspect was considered by several scholars as a defect similar to a charge of indeterminism in the evolution of nature; it is indeed for MAJORANA a reason to claim the intrinsic importance of the statistical method. Up to now this method has been applied only to social sciences and in the new interpretation of physics laws it fully recovers its original meaning.

GIOVANNI GENTILE jr, 1942.

(**) Translated from “Scientia”, vol. 36, 1942, pp. 58-66, by R. N. Mantegna in “Quantitative Finance” 5 (2005) 133-140. Reproduced by kind permission of Taylor and Francis Ltd. (<http://www.tandf.co.uk/journals>).

1. THE CONCEPT OF NATURE ACCORDING TO CLASSICAL PHYSICS

The study of the true or hypothetical relations between physics and other sciences has always been of notable interest due to the special influence that physics has played on the general course of scientific thought in modern times. It is known that the laws of mechanics have been seen for a long time as the ultimate kind of human knowledge about nature. Many scholars have also believed that the imperfect notions of other sciences should eventually be related back to the kind of notions observed in mechanics. The above concept justifies the study we consider here.

The exceptional credit of physics evidently comes from the discovery of the so-called exact laws. These laws consist of relatively simple formulas, originally "excogitated" starting from fragmentary and approximate empirical indications, which turn out to be of universal validity both when these laws are applied to new orders of phenomena and when the progressive improvement of the art of experiments allows one to verify them in a more and more rigorous way. It is known to everybody that according to the fundamental concept of classical mechanics the motion of a physical body is completely determined by the initial conditions (position and velocity) of the body and by the forces that are applied to it. On the nature and size of forces that may be present in material systems, the general laws of mechanics state only some condition, or limitation, that always must be verified. Such a characteristic, for example, has the principle of action and reaction. To this principle one has added, more recently, other general rules such as the ones concerning constrained systems (principle of virtual work) or elastic reactions and, even more recently, the mechanical interpretation of heat and also the energy conservation principle, which is seen as a general principle of mechanics. Apart from these general indications, it is however a special task of physics to discover, case by case, all that is needed to effectively apply the principles of dynamics, which is the knowledge of all forces acting in the system being investigated.

In one case, however, it has been possible to find the general expression for forces that are present between material bodies. This occurs in the case where material bodies are isolated one from the other and therefore the forces are reciprocally acting at distance only. In this last case, if we do not consider electromagnetic forces, which were discovered in the XIX century and which manifest themselves only under specific conditions, the only force acting is the force of gravitation, whose notion was suggested to NEWTON from the mathematical analysis of the KEPLERO laws. The NEWTON law is typically applicable to the study of the motion of celestial bodies which being separated by immense empty spaces, can indeed influence each other only through action at a distance. As is known, this law is indeed sufficient to predict in any aspect and with a beautiful accuracy the complex dynamics of our planetary system. Only one minute exception, the secular displacement that undergoes Mercury's perihelion, constitutes one of the major experimental proofs of the recent theory of general relativity.

The sensational success of mechanics applied to astronomy has encouraged the assumption that more complicated phenomena of common experience must also be in the end reconducted to a similar mechanism, albeit more general than the gravitational law.

According to this point of view, which has produced the mechanistic conception of nature, the entire material universe evolves obeying an inflexible law, where the state of the universe at a given instant of time is completely determined from its state at the previous instant of time. This is a sign of the fact that the future is implicit in the present. In other words, the future can be predicted with absolute certainty provided that the actual state of the universe is completely known. This fully deterministic conception of nature has had numerous confirmations since its introduction. Further developments of physics, from the discovery of the electromagnetism laws to the ones for the theory of relativity, have suggested a progressive enlargement of the principles of classical mechanics. On the other hand, they have vigorously confirmed an essential point, namely, the complete causality in physics. It is not disputable that determinism has the principal and almost exclusive merit of having made possible the magnificent modern development of science, and also in fields very far removed from physics. Determinism, which does not leave any rule to human freedom and forces one to consider all the phenomena of life as illusory, implicates a real cause of weakness. This is the irremediable and immediate contradiction with the most certain data of our conscience. Indeed, how the effective and, most probably, definitive overtaking of determinism has occurred in the physics of recent years will be discussed later. Indeed our final aim will be to illustrate the renovation that the traditional concept of statistical laws must undertake as a consequence of the new direction followed by contemporary physics. At the present stage we still wish to keep the classical conception of physics. This is done not only for its enormous historical interest but also because classical physics is still the only physics largely known except to specialists.

Before ending this introductory part, we wish to point out that criticism of determinism has been raised in recent times. The philosophical reaction, when appropriate, did not extend beyond the philosophical field and essentially it has left the scientific problem untouched. An attempt devoted to solve this specific scientific problem can be found in the work of G. SOREL⁽¹⁾. He is an author representing the pragmatism or philosophical current in pluralism. According to the followers of this movement, an effective heterogeneity of natural phenomena excludes that a unitary knowledge of them might exist. Each scientific principle should be applied to a delimited ambit of phenomena without the possibility of achieving universal validity. G. SOREL develops the criticism of determinism by stating that this concept would apply only to phenomena which he calls *artificial nature*. These phenomena are characterized by the fact that they do not occur in the presence of an appreciable *degradation* of energy (in the sense of the second principle of thermodynamics). These phenomena sometimes occur spontaneously, especially in astronomy, where they constitute phenomena of simple observation. However, more often these phenomena are investigated in laboratories by experimenters. They devote special care to eliminating all possible passive resistances. The other phenomena, which belong to the common experience or to *natural nature* and occur in the presence of

⁽¹⁾ G. SOREL, *De l'utilité du pragmatisme*, Cap. IV, Paris 1921.

passive resistances, would not be controlled by precise laws but they should be affected by chance to a various degree. SOREL explicitly uses a metaphysical principle of G. B. VICO. We do not want to discuss here the arbitrary accentuation given to a specific aspect of science as it has been represented in an epoch which is no longer ours. Here we have to note that the pragmatist principle of judging the scientific doctrines on the basis of their effective usefulness does not justify the attempt of condemning the ideal of the unity of science. This idea has acted as a powerful stimulus to the progress of science many times.

2. THE CLASSICAL MEANING OF STATISTICAL LAWS AND SOCIAL STATISTICS

To fully understand the meaning of statistical laws according to mechanics, one needs to recall a hypothesis about the structure of matter, which was already familiar to the ancients and entered the domain of science due to DALTON at the beginning of the 19th century. He first recognized in the atomic hypothesis the natural explanation for the general laws of chemistry, which had been recently discovered. According to modern atomic theory, which has been definitively confirmed with specific methods of physics, there exists an amount of species of indivisible elementary particles, or *atoms*, of the same number of simple chemical elements. The union of two or more atoms of the same or different species forms the *molecules*. Molecules are the last particles in which one can divide a definite chemical substance, which are capable of independent existence. Single molecules (and sometimes also atoms within molecules) are not located in a fixed position but rather they undergo a very fast movement of translation and rotation around themselves. The molecular structure of gases is very simple. Indeed single molecules of gases can be considered as rather independent in common conditions. The relative distances between molecules are very large with respect to their extremely limited dimensions. By applying the inertial principle one concludes that their motion is rectilinear and uniform most of the time. The motion undergoes abrupt changes of direction and speed only when impacts occur. Supposing we exactly know the laws governing the mutual influence of molecules we should expect, in terms of general principles of mechanics, that it is enough to know the position of all molecules and their translational and rotational velocities *in addition* in order to predict *in principle* the exact state of the system after a certain time interval (although these calculations could be too complex to be effectively realized in practice). The use of the deterministic scheme, which is specific to mechanics, is however subject to a real limitation of principle when we take into account the fact that the *usual* methods of observation are not able to provide us with the exact instantaneous conditions of the system. They provide us only with a certain number of global observables. For example, by considering the physical system given by a certain amount of gas, it is sufficient to know the gas pressure and density to determine other variables, such as the temperature, the viscosity coefficient, etc., that could be the object of specific measurements. In other words, in the present example the values of pressure and density are sufficient to fully determine the state of the system *from a macroscopic point of view*, although they are evidently not sufficient to establish the exact internal structure of the gas at each time, *i.e.* the distribution of position and velocity of all molecules.

To discuss with clarity and conciseness and without any mathematical apparatus, the nature of the relationship between a *macroscopic state* (A) and a real state (a) of a system, we need to relax precision to a certain degree, although we avoid altering the true nature of the facts in an essential way. We therefore need to understand that the observed *macroscopic state* (A) corresponds to a large number of possibilities $a, a', a'' \dots$. Our observations do not allow us to distinguish among them. The *number* N of these internal possibilities would be infinite within the framework of classical theory, but quantum theory has introduced an essential discontinuity in the description of natural phenomena, so that the number (N) of these possibilities in the structure of a system is indeed finite although huge. The value of N gives a measure of the degree of hidden indeterminacy of the system. It is however practically preferable to consider a quantity proportional to its logarithm

$$S = K \log N$$

K being the Boltzmann universal constant, which has been determined by imposing that S coincides with the entropy, which is a known quantity of thermodynamics. Indeed entropy is a physical quantity with the same importance as weight, energy, etc. This is mainly because entropy is an additive quantity in the same manner as the others. In other words, the entropy of a system composed of several independent parts is equal to the sum of the entropy of each single part. To prove this, it is enough to observe that the number of potential possibilities of a composed system is evidently equal to the product of analogous numbers describing the constituent parts together with the known elementary rule establishing the correspondence between the product of two or more numbers and the sum of their logarithms.

In general, there are no difficulties in how to determine the ensemble of internal configurations $a, a', a'' \dots$ corresponding to a macroscopic state A . However one can discuss if all the distinct possibilities $a, a', a'' \dots$ should be considered as equally probable. According to the ergodic or quasi-ergodic hypothesis, which is widely believed to be verified, whether a system persists in a state A indefinitely, then one can state that it spends an equal fraction of its time in each of the configurations $a, a', a'' \dots$. Therefore one considers all possible internal determinations as equally probable. This is indeed a new hypothesis because the universe, which is far from being in the same state indefinitely, is subjected to continuous transformations. We will therefore admit as an extremely plausible working hypothesis, whose far reaching consequences could sometime not be verified, that all the internal states of a system are *a priori* equally probable for specific physical conditions. Under this hypothesis, the *statistical ensemble* associated with each macroscopic state A turns out to be completely defined.

The general problem of statistical mechanics can be summarized as follows: suppose the initial state A has been statistically defined; which predictions, therefore, are possible about its state at time t ? At first sight, it may seem that this definition is too limited because other *static* problems can be considered in addition to the dynamic problem. For example, what is the temperature of a gas whose pressure and density are known? Similarly this applies in all cases when one wishes to determine a quantity of interest

from certain known characteristics of the system, which are sufficient to define its state. The distinction can be formally ignored because by incorporating appropriate measuring instruments in the system one can always go back to the previous case.

Let us suppose that the initial state of the considered system is described by a statistical ensemble $A = (a, a', a'' \dots)$ of possible cases which are, as stated before, equally probable. Each of these specific determinations changes during time according to a law that we have to consider strictly causal in agreement with the general principles of mechanics. Therefore the system moves from the series $a, a', a'' \dots$ to another specific series $\beta, \beta', \beta'' \dots$ after a certain time. The statistical ensemble $(\beta, \beta', \beta'' \dots)$; which is also constituted of N equally probable elements as the original ensemble A (Liouville theorem), defines all the possible predictions for the system evolution. Due to reasons that only a complex mathematical analysis could make precise, in general it turns out that all simple cases belonging to the series, $\beta, \beta', \beta'' \dots$ *except a negligible number of exceptions, wholly or in part* constitute a new statistical ensemble B defined from a well-determined macroscopic state as in A . We can therefore state the *statistical law* according to which there is the practical certainty that the system should move from A to B . Due to the above discussion, the statistical ensemble B is at least as large as A . It contains a number of elements not less than N . It therefore follows that the entropy of B is equal to or larger than that for A . In the presence of any transformation occurring in *agreement with statistical laws* one therefore has a constant or increasing entropy, never a decrease. This is the statistical foundation of the famous second principle of thermodynamics.

It is worth noting that the transition from A to B can be considered certain from a practical point of view. This explains why historically the statistical laws have been originally considered as accurate as the laws of mechanics and only because of the progress of theoretical investigation one has subsequently recognized their true character. The statistical laws include a large amount of physics. Among the most widespread applications, we cite: the gas state equation, the diffusion theory, the theory of thermal conductance, of viscosity, of osmotic pressure and several other similar ones. A specific mention is deserved for the statistical theory of irradiation, which introduces the *discontinuum* symbolized by the PLANCK constant for the first time in physics. Moreover there is an entire area of physics, thermodynamics, whose principles, although directly based on experience, can be related to the general notions of statistical mechanics. On the basis of what has been done before, one can summarize the meaning of statistical laws within classical physics in the following way: 1) natural phenomena obey a complete determinism; 2) the *customary* observation of a system does not allow one to identify the internal state of the system but only the ensemble of very large possibilities which are macroscopically indistinguishable; 3) by establishing a plausible hypothesis for the probability of different possibilities and by assuming valid the laws of mechanics, the probability calculus allows the probabilistic prediction of future phenomena. We are now ready to examine the relation present between the laws established by classical mechanics and the empirical regularities, which are known by the same name especially in social sciences.

First of all, one should realize that the formal analogy could not be more stringent. For example, when one states the statistical law: "In a modern European society the annual

marriage rate is about 8 for 1000 inhabitants". It is clear enough that the investigated system is defined only with respect to certain global characters by deliberately renouncing the investigation of additional information, such as, for example, the biography of all individuals composing the society under investigation. This knowledge would certainly be useful in predicting the phenomenon with a precision and an accuracy higher than in the case for a generic statistical law. This is not different from when one defines the state of a gas by simply using pressure and volume and by deliberately renouncing investigation of the initial conditions for all single molecules. A substantial difference could indeed be detected in the definite mathematical character of the physics statistical laws, which has to be compared with the empirical character of social statistical laws. It is however plausible to attribute the empirism of social statistics (with the term empirism we precisely mean the lack of reproducibility of their results *in addition to the random part*) to the complexity of the considered phenomena. This last aspect implies that it is not possible to precisely define the conditions or the content of the law. On the other hand, physics also has empirical laws when it is studying phenomena of applied interest. Examples are the laws of friction among solid bodies or the magnetic properties of several types of iron and other similar materials. Lastly, one could express the special importance of the difference in the measurement methods, which are global in physics (it is sufficient to read a measurement instrument to know the pressure of a gas in spite of the fact that pressure arises from the sum of independent pulses that single molecules transmit to the walls) whereas in social statistics individual facts are recorded. This difference is however not an absolute antithesis as it is proved by the possibility of various indirect methods of detection. By admitting the arguments that suggest the existence of a real analogy between physics and statistical laws, we are induced to assume as plausible that the social statistical laws are the most direct proof that an absolute determinism also governs human facts in a way similar as physics statistical laws imply a rigid determinism. This is an argument that has had much better fortune because, as said before, one has detected the tendency to see the causality of classical physics as a model of universal value for independent reasons. Here it would be out of place to reopen old and never concluded discussions, but we wish to recall as a generally admitted fact that the absence of conciliation among contrasting intuitions of nature has for a long time played a role in modern thought and in moral values. It is therefore not just a scientific curiosity the announcement that physics has been forced to abandon its traditional course by rejecting the absolute determinism of classical mechanics in a definitive manner in recent years.

3. THE NEW CONCEPTS OF PHYSICS

It is impossible to present with some completeness in a few lines the mathematical apparatus and the experimental content of quantum mechanics⁽²⁾. We will therefore

⁽²⁾ The reader desiring to study thoroughly the knowledge in this matter by avoiding where possible the mathematical difficulty can consult W. HEISENBERG, *Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, Lipsia, 1930.

limit ourselves to some short description. There are experimental facts, known for a long time (interference phenomena), which undoubtedly support in favour of an undulatory theory of light. Conversely, other recently discovered facts (Compton effect) suggest, no less convincingly, the opposite corpuscular theory. All attempts of settling this contradiction within classical physics have been unsuccessful. This may not seem so relevant except that these inexplicable facts and others no less inexplicable and those of the most differing nature and lastly almost all phenomena known to physicists, and up to now insufficiently understood, have been explained with a unique and wonderful simple explanation. This is the one contained in the principles of quantum mechanics. This extraordinary theory is so solidly founded on experience in as much, perhaps, any other one has never been. The criticism that it has received and is receiving are not concerned at all with the legitimacy of its use for effective prediction of phenomena, but rather the widespread opinion that the new approach should be conserved and perhaps even grow in future developments of physics. The specific aspects of quantum mechanics as compared with classical mechanics are as follows.

- a) There are no laws in nature which express a fatal succession of phenomena. Basic laws governing elementary phenomena (atomic systems) have a statistical character. They establish only the *probability* that a measure performed in a prepared system will give a certain result. This occurs in spite of the means by which we are disposed to determine the initial state of the system with the highest possible accuracy. These statistical laws indicate a real deficiency of determinism. They have nothing in common with the classical statistical laws where uncertainty of results derives from a voluntary renunciation for practical reasons to investigate the initial conditions of physical systems in the most minute aspects. Below we will see a well-known example of this new kind of natural law.

- b) A certain lack of *objectiveness* in the description of phenomena. Any experiment performed on an atomic system exerts a finite perturbation on it that cannot be eliminated or reduced for principle reasons. The result of any measure seems, therefore, to be concerned with the state where the system is led during the same measurement rather than the undetectable state in which the system was before the perturbation. This aspect of quantum mechanics is without doubt more disquieting, *i.e.* farther from our customary intuitions, than the simple lack of determinism.

Among the probabilistic laws concerning basic phenomena, the one governing radioactive processes has been known for a long time. Any atom of radioactive matter has a probability $m dt$ in a time interval dt of transforming itself after the emission of an α particle (a helium nucleus) or, in other cases, of a β particle (an electron). The *mortality rate* m is constant, *i.e.* independent of the atom age. This gives a specific form to the *survival curve*, which is exponential. The mean lifetime is $1/m$ and one can estimate the *probable lifetime*, sometimes called the *transformation period*, in an elementary way. Both

quantities are independent of the atom age. Indeed the atom does not manifest any sign of real aging when time elapses. Several methods of observation and automatic recording of the single transformation occurring within a radioactive matter exist. It has been therefore possible to verify through direct statistical measurements and applications of probability calculus that single radioactive atoms do not undergo any reciprocal influence or any external influence concerning the instant of transformation. Indeed the number of disintegrations occurring in a certain time interval is subject to random fluctuations, *i.e.* to the probabilistic character of the individual law of transformation.

Quantum mechanics has taught us to see in the exponential law of radioactive transformations a basic law which is not reducible to a simpler causal mechanism. Of course the statistical laws concerning complex systems known in classical mechanics retain their validity according to quantum mechanics. Quantum mechanics modifies the rules of the determination for internal configurations in two different ways, depending on the nature of the physical systems, ending up with the statistical theories of BOSE-EINSTEIN and FERMI. However the introduction in physics of a new kind of statistical law or, better, simply a probabilistic law, which is hidden under the customary statistical laws, forces us to reconsider the basis of the analogy with the above-established statistical social laws. It is indisputable that the statistical character of social laws derives at least in part from the manner in which the conditions for phenomena are defined. It is a generic manner, *i.e.* strictly statistical, allowing a countless complex of different concrete possibilities. On the other hand, by remembering what has been said above on the *mortality tables* of radioactive atoms, we are induced to ask ourselves whether there also exists here a real analogy with social facts, which are described with a somewhat similar language.

At first sight something seems to exclude this. The disintegration of an atom is a simple fact, which is unpredictable and which occurs abruptly and in isolation after a wait of thousands and even billions of years, whereas nothing similar occurs for facts which are recorded from social statistics. However, this is not an insurmountable objection.

The disintegration of a radioactive atom can force an automatic counter to detect it with a mechanical effect, which is possible thanks to a suitable amplification. Common laboratory set-ups are therefore sufficient to prepare for whatever complex chain of rich phenomena which is *produced* from an accidental disintegration of a single radioactive atom. From a scientific point of view nothing prevents one from considering that an equally simple, invisible and unpredictable vital fact could be found at the origin of human events. If this is so, as we believe it is, the statistical laws of social sciences increase their function. Their function is not only of empirically establishing the resultant of a great number of unknown causes, but, above all, it is to provide an immediate and concrete evidence of reality. The interpretation of this evidence requires a special skill, which is an important support of the art of government.

Comment on the Scientific Paper no. 10: "The value of statistical laws in physics and social sciences".

Majorana published nine articles before his disappearance and a 10th article, whose manuscript was found by Majorana's brother among his files, was published in 1942, after his disappearance, in the international Italian journal *Scientia*, through the interest of his friend Giovanni Gentile jr.

The article is a rather special article in several respects. In the original presentation for *Scientia*, Giovanni Gentile jr. wrote that the article was originally written for a sociology journal. This article was therefore intended to present the point of view of a physicist about the value of statistical laws in physics and social sciences to scholars of a broad spectrum of different disciplines such as sociology and economics. In his article, Majorana considers quantum mechanics as a fundamental and successful theory able to describe the basic processes involving particles and atoms. He explicitly considers quantum mechanics as an irreducible statistical theory because theory is not able to describe the time evolution of a *single* particle or atom in a precise environment at a deterministic level. As an example of the lack of determinism in the time evolution of a single system he discusses the case of the decay of a radioactive atom. This lack of determinism at the level of an elementary physical system motivated him to suggest a formal analogy between statistical laws observed in physics and in social sciences. In his article, he states that: "This conclusion has made essential the analogy between physics and social sciences, between which it turned out an identity of value and method".

According to the biographical and scientific note published in the book edited by Edoardo Amaldi⁽¹⁾, Majorana most probably wrote this article during the period from 1933 to 1937 after his 1933 travel to Lipsia and Copenhagen. According to Amaldi's recollection, after his return to Rome during the fall of 1933 Majorana's involvement in theoretical physics research declined until 1937. During this period Ettore Majorana was studying economics, politics, naval fleets of different countries and their relative strength and philosophical problems.

There is a pioneering nature of this article both from the perspective of physics and of economics. From the physics point of view, Majorana stated that quantum mechanics forces scientists to use a statistical description down to events involving single entities. He took a clear position about the statistical nature of quantum mechanics by considering

(¹) E. AMALDI, *op. cit.*

this property as irreducible in terms of an underlying deterministic theory. From the point of view of economics and social sciences, there is the observation that statistical laws are investigation tools to be used in economic and social modeling and are characterized by the same epistemological status of irreducible probabilistic laws as quantum mechanics. It should be noted that this position was not that of the majority of scholars working in the thirties of the XX century in both the disciplines considered. In fact, during the thirties of the last century the interaction between economics and physics was developed under the paradigm of celestial mechanics and therefore under a complete determinism (the only exception to this approach was the one pursued by Louis Bachelier with the stochastic description of the time evolution of the price of a financial asset that, at that time, had no impact on the academy⁽²⁾). This interaction goes back to the development of the general equilibrium theory pursued by Walras, Pareto, Schlesinger and Wald. The emphasis of Majorana on the intrinsic statistical nature of quantum phenomena motivated him to support the idea that statistical laws should be incorporated into the scientific modeling of social phenomena.

Physics might certainly benefit from a deeper understanding of the role, necessity and peculiarity of statistical laws in physics. Some of the statistical laws are eventually reinterpreted in terms of more fundamental and deterministic laws. However there are cases when a reduction seems to be impossible. One of these cases is indeed quantum mechanics and other more recent examples, in years when Majorana was not active any longer, concern topics of dynamical systems and critical-phenomena theory.

In summary, the 10th article of Majorana raised the necessity of focusing the attention of several disciplines on the value and nature of statistical laws. From physics, to biology and to social sciences, several scientific disciplines present statistical laws and scholars need to reflect about their role and value within each discipline. Majorana took the view that quantum mechanics implies that a scientific description without statistical laws is impossible as far as the description of elementary processes is concerned. Today there is still the need to assess the status of statistical laws in different disciplines and to consider the validation procedures that are most appropriate to these sorts of laws and to their knowledge content.

We wish to conclude this short note by saying that we believe Ettore Majorana today deserves a great tribute not only for his exceptional achievements in theoretical physics but also for his fresh and original views on the essential aspects, importance and role of statistical laws in physics and in other disciplines such as social sciences.

R. N. MANTEGNA
Università di Palermo

⁽²⁾ L. BACHELIER, *Théorie de la spéculation*, Ph.D. Thesis in mathematics, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III-17 (1900) 21–86.

Gli appunti per la lezione inaugurale

ETTORE MAJORANA

Università di Napoli, 13 gennaio 1938

In questa prima lezione di carattere introduttivo illustreremo brevemente gli scopi della fisica moderna e il significato dei suoi metodi, soprattutto in quanto essi hanno di più inaspettato e originale rispetto alla fisica classica.

La fisica atomica, di cui dovremo principalmente occuparci, nonostante le sue numerose e importanti applicazioni pratiche —e quelle di portata più vasta e forse rivoluzionaria che l'avvenire potrà riservarci—, rimane anzitutto una scienza di enorme interesse *speculativo*, per la profondità della sua indagine che va veramente fino all'ultima radice dei fatti naturali. Mi sia perciò consentito di accennare in primo luogo, senza alcun riferimento a speciali categorie di fatti sperimentali e senza l'aiuto del formalismo matematico, ai caratteri generali della concezione della natura che è accettata nella nuova fisica.

* * *

La *fisica classica* di Galileo e Newton all'inizio del nostro secolo è interamente legata, come si sa, a quella concezione *meccanicistica* della natura che dalla fisica è dilagata non solo nelle scienze affini, ma anche nella biologia e perfino nelle scienze sociali, informando di sé quasi tutto il pensiero scientifico e buona parte di quello filosofico in tempi a noi abbastanza vicini; benché, a dire il vero, l'utilità del metodo matematico che ne costituiva la sola valida giustificazione sia rimasta sempre circoscritta esclusivamente alla fisica.

Questa concezione della natura poggiava sostanzialmente su due pilastri: l'esistenza oggettiva e indipendente della materia, e il determinismo fisico. In entrambi i casi si tratta, come vedremo, di nozioni derivate dall'esperienza comune e poi generalizzate e rese universali e infallibili soprattutto per il fascino irresistibile che anche sugli spiriti più profondi hanno in ogni tempo esercitato le leggi esatte della fisica, considerate veramente

come il segno di un assoluto e la rivelazione dell'essenza dell'universo: i cui segreti, come già affermava Galileo, sono scritti in caratteri matematici.

L'*oggettività* della materia è, come dicevo, una nozione dell'esperienza comune, poiché questa insegna che gli oggetti materiali hanno un'esistenza a sé, indipendente dal fatto che essi cadano o meno sotto la nostra osservazione. La fisica matematica classica ha aggiunto a questa constatazione elementare la precisazione o la pretesa che di questo mondo oggettivo è possibile una rappresentazione mentale completamente adeguata alla sua realtà, e che questa rappresentazione mentale può consistere nella conoscenza di una serie di grandezze numeriche sufficienti a determinare in ogni punto dello spazio e in ogni istante lo stato dell'universo fisico.

Il *determinismo* è invece solo in parte una nozione dell'esperienza comune. Questa dà infatti al riguardo delle indicazioni contraddittorie. Accanto a fatti che si succedono fatalmente, come la caduta di una pietra abbandonata nel vuoto, ve ne sono altri — e non solo nel mondo biologico — in cui la successione fatale è per lo meno poco evidente. Il determinismo in quanto principio universale della scienza ha potuto perciò essere formulato solo come generalizzazione delle leggi che reggono la meccanica celeste. È ben noto che un *sistema* di punti — quali, in rapporto alle loro enormi distanze, si possono considerare i corpi del nostro sistema planetario — si muove e si modifica obbedendo alla legge di Newton. Questa afferma che l'accelerazione di uno di questi punti si ottiene come somma di tanti vettori quanti sono gli altri punti:

$$\ddot{\vec{P}}_r \propto \sum_s \frac{m_s}{R_{rs}^2} \vec{e}_{rs},$$

essendo m_s la massa di un punto generico e \vec{e}_{rs} il vettore unitario diretto da \vec{P}_r a \vec{P}_s . Se in tutto sono presenti n punti, occorreranno $3n$ coordinate per fissarne la posizione e la legge di Newton stabilisce fra queste grandezze altrettante equazioni differenziali del secondo ordine il cui integrale generale contiene $6n$ costanti arbitrarie. Queste si possono fissare assegnando la posizione e le componenti della velocità di ciascuno dei punti all'istante iniziale. Ne segue che la configurazione futura del *sistema* può essere prevista con il calcolo purché se ne conosca lo stato iniziale cioè l'insieme delle posizioni e velocità dei punti che lo compongono. Tutti sanno con quale estremo rigore le osservazioni astronomiche abbiano confermato l'esattezza della legge di Newton; e come gli astronomi siano effettivamente in grado di prevedere con il suo solo aiuto, e anche a grandi distanze di tempo, il minuto preciso in cui avrà luogo un'eclisse, o una congiunzione di pianeti o altri avvenimenti celesti.

* * *

Per esporre la *meccanica quantistica* nel suo stato attuale esistono due metodi pressoché opposti. L'uno è il cosiddetto metodo storico: ed esso spiega in qual modo, per indicazioni precise e quasi immediate dell'esperienza, sia sorta la prima idea del nuovo formalismo; e come questo si sia successivamente sviluppato in una maniera obbligata assai più dalla necessità interna che non dal tenere conto di nuovi decisivi fatti sperimentali. L'altro metodo è quello matematico, secondo il quale il formalismo quantistico

viene presentato fin dall'inizio nella sua più generale e perciò più chiara impostazione, e solo successivamente se ne illustrano i criteri applicativi. Ciascuno di questi due metodi, se usato in maniera esclusiva, presenta inconvenienti molto gravi.

È un fatto che, quando sorse la meccanica quantistica, essa incontrò per qualche tempo presso molti fisici sorpresa, scetticismo e perfino incomprensione assoluta, e ciò soprattutto perché la sua consistenza logica, coerenza e sufficienza appariva, più che dubbia, inafferrabile. Ciò venne anche, benché del tutto erroneamente, attribuito a una particolare oscurità di esposizione dei primi creatori della nuova meccanica, ma la verità è che essi erano dei fisici, e non dei matematici, e che per essi l'evidenza e giustificazione della teoria consisteva soprattutto nell'immediata applicabilità ai fatti sperimentali che l'avevano suggerita. La formulazione generale, chiara e rigorosa, è venuta dopo, e in parte per opera di cervelli matematici. Se dunque noi rifacessimo semplicemente l'esposizione della teoria secondo il modo della sua apparizione storica, creeremmo dapprima inutilmente uno stato di disagio o di diffidenza, che ha avuto la sua ragione d'essere ma che oggi non è più giustificato e può essere risparmiato. Non solo, ma i fisici — che sono giunti, non senza qualche pena, alla chiarificazione dei metodi quantistici attraverso le esperienze mentali imposte dal loro sviluppo storico — hanno quasi sempre sentito a un certo momento il bisogno di una maggiore coordinazione logica, di una più perfetta formulazione dei principi, e non hanno sdegnato per questo compito l'aiuto dei matematici.

Il secondo metodo, quello puramente matematico, presenta inconvenienti ancora maggiori. Esso non lascia in alcun modo intendere la genesi del formalismo e in conseguenza il posto che la meccanica quantistica ha nella storia della scienza. Ma soprattutto esso delude nella maniera più completa il desiderio di intuirne in qualche modo il significato fisico, spesso così facilmente soddisfatto dalle teorie classiche. Le applicazioni, poi, benché innumerevoli, appaiono rare, staccate, perfino modeste di fronte alla sua soverchia e incomprensibile generalità.

Il solo mezzo di rendere meno disagiata il cammino a chi intraprende oggi lo studio della fisica atomica, senza nulla sacrificare della genesi storica delle idee e dello stesso linguaggio che dominano attualmente, è quello di premettere un'esposizione il più possibile ampia e chiara degli strumenti matematici essenziali della meccanica quantistica, in modo che essi siano già pienamente familiari quando verrà il momento di usarli e non spaventino allora o sorprendano per la loro novità: e si possa così procedere speditamente nella derivazione della teoria dai dati dell'esperienza.

Questi strumenti matematici in gran parte preesistevano al sorgere della nuova meccanica (come opera disinteressata di matematici che non prevedevano un così eccezionale campo di applicazione), ma la meccanica quantistica li ha "sforzati" e ampliati per soddisfare alle necessità pratiche; così essi non verranno da noi esposti con criteri da matematici, ma da fisici. Cioè senza preoccupazioni di un eccessivo rigore formale, che non è sempre facile a raggiungerci e spesso del tutto impossibile.

La nostra sola ambizione sarà di esporre con tutta la chiarezza possibile l'uso effettivo che di tali strumenti fanno i fisici da oltre un decennio, nel quale uso — che non ha mai condotto a difficoltà o ambiguità — sta la fonte sostanziale della loro certezza.

Commento su “Gli appunti per la lezione inaugurale”.

1. Le procedure della chiamata e della *lectio magistralis* a Napoli

Il 5 giugno del 1224 Federico II, re di Germania ed imperatore dei Romani, inviava da Siracusa a tutte le autorità del Regno una circolare (*generales licterae*) che esordiva con:

“Col favore di Dio, per il quale viviamo e regniamo, al quale riferiamo quanto di bene facciamo, desideriamo che, mediante una fonte di scienza ed un semenzaio di dottrina, nel Regno nostro molti diventino savi ed accorti, i quali, resi abili dallo studio e dalla meditazione del diritto, servano a Dio, al quale tutte le cose servono, e piacciono a noi per il culto della giustizia, ai cui precetti ordiniamo a tutti di obbedire. Abbiamo perciò disposto che, nell’amenissima città di Napoli, s’insegnino le arti e si coltivino gli studi di ogni professione, affinché i digiuni ed affamati di dottrina trovino dentro il Regno stesso di che soddisfare le loro brame, e non sieno costretti, per procurare d’istruirsi, a imprendere lunghi viaggi, e mendicare in terre straniere.”

Nella stessa circolare annunciava che *“uno dei maestri da lui scelti sarebbe stato il dottissimo Roffredo di Benevento”*, e stabiliva che *“si farà prestito agli scolari...”*; come riferito da Torraca⁽¹⁾, le lezioni allo “Studio” sarebbero cominciate nell’ottobre del 1224.

La nomina dei professori e la durata della stessa erano quindi prerogativa dell’imperatore. Tale procedura fu mantenuta da Corrado e Manfredi e, dopo una breve interruzione succeduta alla battaglia di Benevento (1266), dagli Angioini (1266-1442) e successivamente dagli Aragonesi (1442-1503). È nel 1503 che ha inizio il periodo spagnolo con Ferdinando il Cattolico. All’inizio lo Studio rimase chiuso per qualche anno, ma fu riaperto il giorno di S. Luca (18 Ottobre) del 1507. Va notato che era in tale giorno che l’Università di Salamanca, fondata sei anni prima dello Studio, usava riaprire i battenti; peraltro, come vedremo più avanti, lo Studio di Salamanca fu sempre un riferimento per Napoli.

La persona che portò un significativo contributo fu senz’altro il vicerè D. Pietro Fernandez de Castro, conte di Lemos. Questi, infatti, non solo fece edificare un grande edificio fuori della porta di Costantinopoli, ora sede del Museo Archeologico, che fu occupato dallo Studio dal 1615 fino all’inizio del secolo XVIII, ma realizzò, fra il 1614 e il 1616, una profonda riforma nella procedura per il reclutamento dei professori. Tale riforma copia sostanzialmente la regola sancita per l’Università di Salamanca nel 1561, in cui si

(1) Stamperia di Giovanni de Simone, Napoli MDCCLIV.

stabilisce che il reclutamento avviene con una procedura di concorso bandito dal Governo e dopo un pubblico esame davanti ad una commissione composta da professori e lettori, anche di collegi religiosi. A Salamanca, dopo il pubblico esame gli aspiranti attendevano in una cappella la chiamata del vincitore e l'invito ad unirsi al consesso dei professori.

Come riportato da Giangiuseppe Origlia nella sua *Istoria dello Studio di Napoli*⁽²⁾, il pubblico esame consisteva *“in porre al concorrente l'obbligo di pubblicamente esporre a viva voce e per lo continuo spazio di un'ora e senza l'aiuto de' scritti . . . , quei punti della materia, . . . , li quali 24 ore prima”* gli erano stati assegnati *“dal Prefetto in presenza de' testimoni.”*

A dimostrazione dell'interesse con cui queste lezioni erano seguite, Origlia precisa che il pubblico presente era costituito dai *“lettori e tutti quelli che avevano la facoltà di dare il suffragio alla Cattedra, ch'era da conferirsi, non che d'uno stuolo infinito de' scolari, o d'altri, che desideravano in simili giostre essere presenti”*.

Il Lemos stabilì anche le regole per l'apertura dell'Anno Accademico (la prima il 14 giugno 1615). Secondo una testimonianza di un contemporaneo, la cerimonia iniziò con un corteo in cui *“andavano prima i legisti con mozzetta(*) di drappo verde e cappello con fiocco di seta verde, quindi i medici con mozzetta di drappo torchino e cappello con fiocco dello stesso colore, quindi i teologi con mozzetta di drappo bianco e cappello dello stesso colore.”*

Una volta giunti al palazzo dello Studio, ebbe luogo la cerimonia con una *lectio magistralis* letta da Gio. Lorenzo di Rogiero.

Le acconciature incontrarono l'irrisione del popolo; ciò nonostante furono mantenute per le successive analoghe circostanze.

In ⁽²⁾, Nino Cortese descrive le occasioni in cui veniva letta una lezione con carattere ufficiale nel seguente modo: *“L'anno scolastico si apriva solennemente con un'orazione di uno dei lettori; inoltre si continuò un uso già in voga nel secolo precedente, pel quale questi ultimi, all'atto di prendere possesso della cattedra, pronunciavano una vera e propria prolusione.”*

Questa prolusione inaugurale era una usanza seguita anche a Salamanca e divenne una tradizione che in Spagna trovò una formalizzazione in un Decreto Real del 20 agosto 1859, ma a Napoli rimase interna all'Ateneo.

Tornando alla procedura di reclutamento, va detto che non sempre avvenne per concorso tant'è che il vicerè marchese di Villena dovette, nel 1703, ribadire che i concorsi erano assolutamente necessari ed obbligò coloro che erano stati nominati lettori senza aver sostenuto un concorso a sottomersi a tale procedura. Nella stessa prammatica, il Villena ordina che ogni cattedratico esponga durante il corso una conclusione generale della materia che legge (si tenga presente che la lezione era divisa in due parti; nella prima il lettore dettava, nella seconda spiegava).

⁽²⁾ F. TORRACA, *Storia della Università di Napoli* (Riccardo Ricciardi Editore, Napoli) MCMXXIV.

(*) Corta mantellina; i papi, nelle cerimonie, ne indossano una bianca.

Lo Studio seguì queste regole sino al 1707, quando il regno venne occupato dagli Austriaci per ventisette oscuri anni e il Palazzo dello Studio fu occupato dalle truppe austriache. Le lezioni tornarono a tenersi nel chiostro del convento di S. Domenico Maggiore, come usava prima del 1615. La ristrettezza dello spazio rese difficile lo svolgimento della didattica, ma la situazione non cambiò, nonostante le suppliche del Cappellano Maggiore alle Autorità⁽³⁾.

Nel 1735 il Regno riacquistò l'indipendenza, il Re ordinò di restaurare la sede dello Studio ed il 4 Novembre 1736 fu inaugurato l'anno accademico con una prolusione di Giovan Battista Vico, lettore regio della scienza della Retorica. Tutte le *lectiones magistrales* di cui si è detto erano rigorosamente in latino.

Nel 1754 ci fu un evento che dette una svolta a questa regola. Un matematico toscano, Bartolomeo Inferi, vivente a Napoli, amministratore di beni dei Medici e dei Corsini, propose alla Corte di istituire una cattedra finanziata con una rendita di 300 ducati, frutto di un capitale in banca di 7500 ducati, a condizione che l'insegnamento fosse impartito in lingua italiana. Questa proposta incontrò varie difficoltà, ma alla fine fu approvata e il 5 novembre 1754 Antonio Genovese poté salire sulla cattedra di filosofia economica e di economia civile, che fu la prima cattedra di economia pubblica in Europa, tenendo una *lectio magistralis* alla presenza di un pubblico straordinariamente folto.

Nella seconda metà del '700 non ci furono particolari novità, salvo una leggerissima apertura alle discipline scientifiche, il trasferimento dello Studio nel 1777 nei notevoli spazi resisi liberi dopo la cacciata dei gesuiti del 1767, e la temporanea chiusura dello Studio nel 1799 dopo l'ingresso della *gloriosa armata cristiana* del cardinal Ruffo di Calabria che represses la Rivoluzione Napoletana, con sette professori afforcati ed undici arrestati.

Il passaggio ad una Università moderna si ebbe con la venuta dei francesi nel 1806 al seguito di Giuseppe Bonaparte, che ripartì l'Università degli Studi di Napoli nelle classi di diritto, teologia, medicina, scienze naturali, e filosofia: quest'ultima associata alle cattedre di logica e metafisica, matematica semplice, matematica trascendentale, meccanica, fisica sperimentale e astronomia; c'era infine una classe di cattedre diverse. Ancora più moderna l'innovazione introdotta da Gioacchino Murat, che, sulla base di una accurata analisi condotta da una commissione di cui fu relatore Vincenzo Cuoco, con decreto del 1811, introdusse le Facoltà, fra cui quella di scienze fisiche e matematiche, con le cattedre di matematica sintetica, matematica analitica, calcolo degli'infiniti, arte euristica o dell'invenzione matematica, meccanica, fisica sperimentale (con un gabinetto di macchine e un aggiunto), zoologia, botanica (con un giardino botanico), fisiologia vegetale, storia naturale (con l'obbligo del corso di anatomia comparata e con un museo curato da un professore cui era affidato il corso di iconografia naturale), mineralogia (con un gabinetto mineralogico ed un laboratorio), chimica (con un gabinetto ed un aggiunto cui era affidato il corso di farmacia) e di astronomia (con un osservatorio e due aggiunti).

⁽³⁾ I. ASCIONE, *L'Università di Napoli nei documenti del '700 (1690-1734)* (Edizioni Scientifiche Italiane) 1997.

Con lo stesso decreto Murat riformò i concorsi sulla base delle seguenti regole:

- le commissioni d’esame non vedevano più insieme tutti i professori, ma questi venivano accorpatisi (ad esempio, scienze era accorpata a medicina);
- i candidati inviavano al Cancelliere uno scritto con l’esposizione della propria esperienza e delle proprie idee in un plico contenente una busta al cui interno c’era il proprio nome;
- questo scritto veniva esaminato da un segretario; se lo scritto era disapprovato, la busta veniva bruciata;
- gli autori degli scritti approvati venivano sottoposti ad un esame analogo a quelli in uso nel passato;
- al termine i commissari esprimevano il loro voto segreto ed il risultato veniva trasmesso alle autorità di governo e quindi al Re che firmava il decreto di nomina.

Certamente era mantenuta la regola secondo cui il nuovo professore pronunciava la sua lezione inaugurale, detta anche *lectio magistralis*, alla presenza della facoltà e di invitati.

Quest’ultima tradizione è sicuramente durata fino alla seconda guerra mondiale, ma è stata man mano abbandonata (a Salamanca già nel 1973). Ad esempio, nessuno dei fisici che sono andati in cattedra dopo Majorana l’ha tenuta, mentre risulta che, nella nostra facoltà di lettere, ne siano state ancora tenute nel 1992 e nel 1993.

2. Majorana: Il conferimento della cattedra e la sua *lectio magistralis*

Dopo il concorso del 1926, in cui ottennero la cattedra Fermi, Persico e Pontremoli, passarono dieci anni prima che si aprisse, nel 1937, un nuovo concorso per la fisica teorica, richiesto dall’università di Palermo per iniziativa di Emilio Segré. A questo nuovo concorso volle partecipare Ettore Majorana (o per propria iniziativa o perché invitato da amici). Per chi conosce il carattere di Majorana, così lontano da interessi accademici, questa decisione può sembrare strana. Ma una spiegazione ci è giunta nei mesi scorsi. Premettiamo il ricordo che, dopo il rientro da Lipsia della fine del 1933, Ettore si allontanò dal gruppo di Fermi, ma non dalla fisica, come testimoniano molti documenti⁽⁴⁾. Per di più De Gregorio⁽⁵⁾ ha recentemente scoperto presso l’Università di Roma “La Sapienza”, che, negli anni di isolamento, e precisamente per gli AA. AA. 1933/34, 1934/35 e 1935/36, il Majorana aveva chiesto di potere tenere presso l’Istituto di via Panisperna dei corsi universitari “liberi”, cosa cui aveva diritto possedendo egli la libera docenza. Il direttore Corbino fece approvare tali domande, ma pare che il Nostro non tenne mai le desiderate lezioni, probabilmente per la mancanza, allora, di studenti capaci di comprenderne la importanza.

Majorana era molto interessato, quindi, all’insegnamento di quanto la sua mente prodigiosa andava scoprendo delle leggi della natura. Ed è probabile che partecipò volentieri al concorso del 1937 proprio per avere finalmente degli allievi (ai quali prestò

⁽⁴⁾ E. RECAMI, *Il Caso Majorana: Epistolario, Documenti, Testimonianze* (Mondadori, Milano) 1987, 1991; si veda la IV edizione ampliata (Di Renzo Editore, Roma) 2002.

⁽⁵⁾ A. DE GREGORIO e S. ESPOSITO, in *Sapere*, no. 3, Giugno 2006, 56; e *Teaching theoretical physics: The cases of E. Fermi and E. Majorana*, preprint [arXiv:physics/0602146](https://arxiv.org/abs/0602146).

molta attenzione, come stiamo per vedere). Come sappiamo, su proposta della Commissione preposta al concorso, presieduta da Fermi, il 2 novembre 1937 il ministro Bottai emette il decreto di nomina di Ettore Majorana a professore ordinario di fisica teorica, presso la Regia Università di Napoli, fuori concorso; e alla fine del 1937 tale nomina viene partecipata dal Ministero a Ettore, presso la sua abitazione di viale Regina Margherita 37 in Roma, “*per l’alta fama di singolare perizia cui Ella è pervenuta nel campo degli studi riguardanti la detta disciplina, con decorrenza dal 16 novembre 1937-XVI*”. Majorana si reca a Napoli dopo l’Epifania (verso il 10 gennaio 1938), e il 12 scrive dalla sua sede universitaria al ministro Bottai asserendo, tra l’altro, “... *tengo ad affermare che darò ogni mia energia alla scuola e alla scienza italiane, oggi in così fortunata ascesa*”⁽⁶⁾.

Le lettere del 1938 di Ettore Majorana, aventi rilevanza anche per le circostanze della sua scomparsa, sono contenute in bibliografia ⁽⁴⁾. Accenniamo brevemente solo a quelle che qui ci interessano. Nella lettera dell’11 gennaio 1938 da Napoli, alla madre, Ettore scrive: “*Ho annunciato l’inizio del corso per giovedì 13 alle ore nove. Ma non è stato possibile verificare se vi sono sovrapposizioni d’orario, così che è possibile che gli studenti non vengano e che si debba rimandare. Ho visto il preside con cui ho concordato di evitare ogni carattere ufficiale all’apertura del corso, e anche per questo non vi consiglierai di venire...*”. La famiglia, invece, si presentò puntuale il giovedì 13 gennaio 1938, alle ore nove, per assistere alla prolusione di Ettore. Alla lezione assisterono i professori della Facoltà, fra cui sicuramente Antonio Carrelli e Renato Caccioppoli, molto amici tra loro; come ricorda Gilda Senatore, gli studenti non furono invitati.

Gli appunti per la prolusione al corso, o lezione inaugurale, sono stati rinvenuti da uno di noi [E.R.] verso il 1972 e resi noti per la prima volta dieci anni dopo⁽⁷⁾⁽⁸⁾: essi sono più sopra riportati. In essi traspare l’interesse dello scienziato, non solo per le questioni generali e di fondo che animano la ricerca scientifica, ma anche per il migliore *metodo didattico* da seguire per trasmettere il sapere agli allievi (per i quali nutriva, ripetiamo, profondo interesse).

Una lettura degli appunti di Majorana per la sua prolusione può riuscire rivelatrice riguardo a vari aspetti del carattere scientifico ed umano del Nostro; avvertiamo solo che in essi ci si riferisce alla fisica classica e alla meccanica quantistica, trascurando in questa prima fase gli aspetti relativistici: aspetti che verranno trattati dal Majorana solo

⁽⁶⁾ I documenti, scoperti, raccolti, e per primo pubblicati, da E. Recami, sono contenuti in bibliografia ⁽⁴⁾. Essi (fotografie incluse) sono coperti da copyright a favore di Recami, della famiglia Majorana, ed, ora, dell’editore Di Renzo, ed abbisognano del permesso scritto degli aventi diritto per la loro riproduzione. Ovviamente ne sono escluse tutte le carte *scientifiche*.

⁽⁷⁾ E. RECAMI, in *Corriere della Sera* (Milano), 19 Ottobre 1982. Si vedano anche le biografie ⁽⁴⁾ e ⁽⁸⁾.

⁽⁸⁾ B. PREZIOSI (Curatore), *Ettore Majorana – Lezioni all’Università di Napoli*, (Bibliopolis, Napoli) 1987. Questo volume contiene, oltre a un commento di N. Cabibbo, anche un articolo di E. Recami contenente il già citato testo della lezione inaugurale e il catalogo dei manoscritti scientifici inediti del Nostro (ad opera di M. Baldo, R. Magnani e E. Recami); per questo catalogo si veda anche E. RECAMI, *Quaderni di Storia della Fisica*, no. 5 (1999) 19-68.

nella seconda parte del corso, come rivelato dagli appunti delle sue ultime sei lezioni recentemente scoperti. Majorana era particolarmente sedotto dalla descrizione anti-meccanicistica e “probabilistica” della meccanica quantistica, tanto da trattarla ampiamente anche nel suo articolo⁽⁹⁾, pubblicato postumo, nel 1942, da Giovannino Gentile. Già il 27 luglio 1934, da Monteporzio Catone (RM), Majorana aveva scritto allo stesso Gentile: “*Credo che il maggior merito del libro di Jeans⁽¹⁰⁾ sia quello di anticipare le reazioni psicologiche che il recente sviluppo della fisica dovrà fatalmente produrre quando sarà generalmente compreso che la scienza ha cessato di essere una giustificazione per il volgare materialismo...*”.

Poiché il mito ha associato la scomparsa di Ettore con timori circa la possibile costruzione della bomba atomica, osserviamo subito che, fin dagli inizi della sua lezione inaugurale, Ettore dichiara esplicitamente: “... *La fisica atomica, di cui dovremo principalmente occuparci, nonostante le sue numerose e importanti applicazioni pratiche — e quelle di portata più vasta e forse rivoluzionaria che l'avvenire potrà riservarci —, rimane anzitutto una scienza di enorme interesse speculativo, per la profondità della sua indagine che va veramente fino all'ultima radice dei fatti naturali...*”. Il periodare di Majorana lascia intendere che, anche di fronte alle applicazioni forse “rivoluzionarie” alle quali la fisica atomica e nucleare avrebbero potuto portare, il loro interesse (in particolare per lui) è essenzialmente quello speculativo.

3. Le lezioni del suo corso di fisica teorica

Come testimoniato da Gilda Senatore e Sebastiano Sciuti, gli alunni del corso, che iniziò il 15 gennaio, furono, oltre a loro due, Nella Altieri, Laura Mercogliano, Nada Minghetti e Savino Coronato, allievo di Caccioppoli, che dopo l'ultima lezione non frequentò più l'Istituto Fisico e che si laureò in Matematica lo stesso anno. A loro testimonianza nessun altro partecipò, salvo, molto sporadicamente, Mario Cutolo, già laureato in fisica.

Ai propri studenti il Majorana dedicava la più grande attenzione; e ne era soddisfatto. Invero, il 2 marzo 1938, nella sua ultima lettera all'amico e collega Giovanni Gentile jr, scrive: “... *Sono contento degli studenti, alcuni dei quali sembrano risolti a prendere la fisica sul serio...*”. Quando prendeva in mano il gesso, la sua timidezza scompariva ed Ettore, come è facile immaginare, si trasfigurava, mentre dalla sua mano uscivano con facilità intere, eleganti lavagne di simboli fisici e matematici. Ciò è stato ricordato da Gilda Senatore di fronte alla telecamera di Bruno Russo, e più di recente, in occasione del 60mo anniversario dalla sua scomparsa, in un convegno organizzato dall'Università Federico II di Napoli.

L'intera serie degli appunti autografi di lezione redatti con ogni cura da Majorana, a

⁽⁹⁾ E. MAJORANA, “Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali”, *Scientia* **36** (1942) 58-66.

⁽¹⁰⁾ J. JEANS, *I Nuovi Orizzonti della Scienza* (Sansoni, Firenze) 1934, traduzione italiana a cura di G. Gentile jr.

beneficio dei propri allievi (e forse Ettore stava pensando di scrivere un libro per studenti, così come aveva pensato ad un libro nello stendere i suoi originalissimi appunti di studio, i *Volumetti*⁽¹¹⁾) fu consegnata alla prediletta studentessa Gilda Senatore insieme con altri scritti, che non sono stati ritrovati, il giorno prima di partire per Palermo. Come queste carte arrivarono, tra la fine del '38 ed i primi del '39, a Carrelli e in che occasione Carrelli le trasmise ad Amaldi, prive di sei lezioni riguardanti l'elettrodinamica e la relatività speciale, è descritto in ⁽¹²⁾ e in una lettera di Preziosi a "Le Scienze" (settembre 2002). È interessante notare che nel 1939-40 Carrelli tenne un corso di relatività speciale, con le relative dispense pubblicate dal GUF nel 1940. Le dieci lezioni trasmesse ad Amaldi, e da lui depositate alla Domus Galilaeana, furono pubblicate anastaticamente in ⁽⁸⁾. Recentemente, S. Esposito⁽¹³⁾ ed Antonino Drago hanno rinvenuto, fra le carte lasciate alla famiglia da Eugenio Moreno, uno studente di Matematica che si laureò con Caccioppoli nel 1941, la trascrizione, di pugno del Moreno, di tutti gli appunti manoscritti da Majorana, incluse la parte di relatività che non c'è tra i documenti depositati nella Domus, ma che, a memoria di Gilda Senatore, *c'era* fra gli appunti consegnatili da Majorana. Tali appunti completi sono in ⁽¹⁴⁾.

BRUNO PREZIOSI
 Università di Napoli
 ERASMO RECAMI
 Università di Bergamo

⁽¹¹⁾ S. ESPOSITO, E. MAJORANA jr, A. VAN DER MERWE e E. RECAMI, *Ettore Majorana - Notes on Theoretical Physics*, (Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston e New York) 2003. (Edizione nella lingua originale italiana: MAJORANA E., *Appunti inediti di fisica teorica*, a cura di S. Esposito e E. Recami (Zanichelli, Bologna) 2006).

⁽¹²⁾ *L'eredità di Fermi e Majorana ed altri temi* (Bibliopolis, Napoli) 2006.

⁽¹³⁾ S. ESPOSITO, *Nuovo Saggiatore*, **21** No. 1-2 (2005) 21-41.

⁽¹⁴⁾ S. ESPOSITO (Curatore), *Ettore Majorana - Lezioni di Fisica Teorica* (Bibliopolis, Napoli) 2006.

Preliminary notes for the inaugural lecture

ETTORE MAJORANA

University of Naples, 13 January 1938

In this first introductory lecture I will briefly discuss the aims of modern physics and the significance of its methods, with particular emphasis on their most unexpected and original aspects with respect to classical physics.

Atomic physics, which will be the main subject of my discussion, despite its important and numerous practical applications —together with those of a wider and perhaps revolutionary impact that the future may have in store—, is first of all a science of immense *speculative* interest for the depth of its investigation that really reaches the extreme roots of natural facts. Let me first mention, without referring to any specific category of experimental facts and without the help of mathematical formalism, the general characters of the conceptions of nature that the new physics has introduced.

* * *

As is well known, at the beginning of our century the *classical physics* of Galileo and Newton is entirely founded on a *mechanistic* conception of nature that from physics has spread out not only to the sciences that are closer to it but also to biology and even to social sciences. This conception was extended in very recent times to almost all the scientific thinking and to a good extent also to the philosophical one, even though, to tell the truth, the usefulness of the mathematical method, which represented the only valid justification of the mechanistic conception, has always been limited only to physics.

This conception of nature rested essentially on two pillars: the objective and independent existence of matter, and physical determinism. As we shall see, in both cases these notions were based on common experience and were then generalized and given a universal and infallible character mostly because of the irresistible fascination that the exact laws of physics have always had even on the deepest thinkers: they were considered

as a sign of the absolute and the revelation of the essence of the universe whose secrets, as Galileo already proclaimed, are written in mathematical characters.

The *objectivity* of matter derives, as I have said, from common experience which teaches us that material objects have their own existence independently of the fact that they are or are not observed. Classical mathematical physics has added to this elementary observation the further statement or requirement that it is possible to give a mental representation of this objective world which is perfectly adequate to explain reality; and that such a mental representation can consist in the knowledge of a series of numerical quantities sufficient to determine at every point in space and at every instant of time the state of the physical universe.

Determinism instead only partially derives from common experience. In fact this common experience gives contradictory indications: besides facts that inevitably occur, as for example the free fall of a body in vacuum, there are others —and not only in the biological world— for which the inevitable occurrence is at least little evident. Determinism, as a universal principle of science, could therefore be formulated only as a generalization of the laws of celestial mechanics. It is well known that a *system* of points —as the bodies of our planetary system can be considered because of their enormous distances— moves and changes according to Newton's law. This law states that the acceleration of one of these points is obtained from the sum of as many vectors as the other points are:

$$\ddot{\vec{P}}_r \propto \sum_s \frac{m_s}{R_{rs}^2} \vec{e}_{rs},$$

m_s being the mass of a generic point and \vec{e}_{rs} the unit vector with direction from \vec{P}_r to \vec{P}_s . If we have a total of n points, $3n$ coordinates will be necessary to fix their position, and Newton's law establishes among these quantities as many second-order differential equations whose general integrals contain $6n$ arbitrary constants. These constants can be determined by assigning the position and the velocity components of each point at the initial time. Hence it follows that the future configuration of the *system* can be predicted by calculation, provided we know its initial state, *i.e.* the set of positions and velocities of the points which compose it. Everyone knows the extreme accuracy with which astronomical observations have confirmed the exactness of Newton's law and how astronomers can actually predict with its help only, and even in the distant future, the precise instant of an eclipse or a conjunction of planets or other celestial events.

* * *

To illustrate the present state of *quantum mechanics* there exist two almost opposite methods. One is the so-called historical method: It explains how, starting from precise and almost immediate experimental indications, the first idea of the new formalism was born; and how its subsequent development was compulsorily determined more by its internal consistency than by newly discovered fundamental experimental phenomena. The other method is the mathematical one, according to which the quantum formalism

is presented right from the beginning in its most general and therefore clearest structure and only later its criteria of application are discussed. Each one of these two methods, if exclusively applied, has very serious drawbacks.

It is a fact that, when quantum mechanics was born, for some time it was looked at by many physicists with surprise, skepticism and even considered as completely incomprehensible. This was mainly due to the fact that its logical consistency, internal coherence and sufficiency appeared dubious and even elusive. This was also attributed, though in a completely wrong way, to a special obscurity of exposition by the first founders of the new mechanics. But the truth is that they were physicists and not mathematicians and for them the evidence and justification of the theory rested essentially on the immediate applicability to the experimental facts that had suggested it. The general formulation, clear and rigorous, came later partly thanks to mathematical minds. If we were then to simply repeat the exposure of the theory according to its historical appearance, we would unnecessarily create at first an uncomfortable or distrustful feeling that was justified in the old days but which can no longer be accepted and can be spared. Furthermore physicists—who have managed to clarify, not without trouble, the quantum methods by means of conceptual experiments imposed by their own historical progress—have, not rarely, felt the need for a greater logical coordination and a more perfect formulation of the principles, and have not refused the help of mathematicians in this effort.

The second method, the purely mathematical one, presents even greater inconveniences. It does in no way allow to understand the origin of the formalism and as a consequence the place that quantum mechanics has in the history of science. Moreover it does not fulfil at all the desire to somehow perceive by intuition its physical significance, often so easily satisfied by classical theories; finally its applications, though quite numerous, appear few and disconnected, and even modest compared to its overwhelming and incomprehensible generality.

The only way to make life easier for those who begin today the study of atomic physics, without any sacrifice of the historical origin of the ideas and even of the language we use today, is to start with an ample and clear discussion of the mathematical tools that are essential to quantum mechanics. Then the student will be already familiar with such tools, when the time will come to use them, and will no longer be frightened or surprised by their novelty: at this stage, one will be thus able to proceed rapidly to derive the theory from the experimental data.

Most of these mathematical tools already existed before the beginning of the new mechanics (they had been without specific interests introduced by mathematicians who did not forecast such an exceptionally wide field of application); but quantum mechanics has “forced” and extended them to satisfy its practical needs. Thus we will expose them not as mathematicians but rather as physicists would do, *i.e.* with the criterion not to worry about an excessive formal rigour, which is not always easy and often totally impossible to achieve.

Our only ambition will be to discuss as clearly as possible the effective way in which physicists have been using those tools for over a decade: It is this use, that has never led to any difficulty or ambiguity, that constitutes the essential source of their certainty.

Comment on the "Preliminary notes for the inaugural lecture."

1. The procedures for the chair assignment and for the *lectio magistralis* in Naples

On June 5th 1224, Fredric II, king of Germany and emperor of the Romans, sent forth from Siracuse to all authorities in the Kingdom a circular letter (*generales licterae*) which commenced:

"With God's blessing, for whom we live and reign, to whom we report all the good we do, we wish that, in our Kingdom, through a source of science and a breeding ground of erudition, many may become wise and shrewd, who, made skilful by the meditation and the study of law, may serve God, to whom all things serve, and be useful to us for the worship of justice, whose commands we order all of you to obey. Therefore we have provided that, in the most pleasant city of Naples, arts may be taught and studies of all professions may be cultivated, thus those who are thirsty and greedy for erudition may find within the Kingdom itself how to satisfy their thirst, not being forced to procure education, by embarking on long journeys and begging in foreign lands."

In the same circular he announced that "one of the scholars he meant to choose was the well learned Roffredo di Benevento" and stated that "loans will be allowed to pupils. . ."; as referred by Torraca⁽¹⁾, lectures at the "Studium" began in October 1224.

The appointment of the professors was then a privilege of the Emperor. This procedure was kept by Corrado and Manfredi and, after a brief interruption following the battle of Benevento (1226), by the Angevins (1266-1442) and later by the Aragoneses (1442-1503). In 1503, with Ferdinand the Catholic, the Spanish period started. At the beginning the Studium was closed for a few years, but it was reopened on St. Luca's day (October 18) in 1507. It is interesting to point out that the University of Salamanca, funded six years earlier than the Studium, used to open on the same day; moreover, as we shall see further down, the University of Salamanca was always taken as a reference institution.

The person who brought important innovation was certainly the viceroy D. Pietro Fernandez de Castro, Earl of Lemos. Not only did he order that a big building was built outside Costantinopoli gate—the building hosted the Studium from 1615 till the beginning of the XVIII century and at present it hosts the archaeological museum—, but he also made a deep reform in the way professors were recruited between 1614 and 1616.

⁽¹⁾ Stamperia di Giovanni de Simone, Napoli MDCCLIV.

The reform is basically the same as the rule sanctioned by the University of Salamanca in 1561, which states that the assignment is carried out through a competition announced by the government and after a public examination in front of a commission made of professors and lecturers even belonging to religious orders, but, contrary to Salamanca's procedure, there were no students. In Salamanca, after the public examination, the competitors were invited to wait in a chapel for the call of the winner and the invitation to join the professor board.

As Giangiuseppe Origlia reports in his *Istoria dello Studio di Napoli*⁽²⁾, in the public exam the applicant was “*imposed to explain publicly and loudly for the duration of one whole hour without the help of any written paper. . . those topics of the subject. . . which had been given to him 24 hours earlier by the Prefect in the presence of witnesses.*”

To underline the interest with which these lessons were attended, Origlia says that the people who attended the lessons were “*lecturers and all those who had the right to vote for the chair which was to be assigned, as well as a crowd of students, and others, who wished to attend such ‘jousts’.*”

Earl of Lemos also fixed the rules for the opening of the academic year (the first time on June 14th 1615). According to the testimony of a person of the time, the ceremony started with a procession “*opened by the jurists, wearing a green brocade ‘mozzetta’(*) and a hat with a green flock; the physicians, with a blue brocade ‘mozzetta’ and a hat with a blue flock were in the middle; at the end the theologians with a white brocade ‘mozzetta’ and a hat with a white flock.*”

Once the procession reached the palace of the Studium, the ceremony started with a *lectio magistralis* read by Gio. Lorenzo Rogiero.

Although the clothes provoked the people's derision, they were used also in the following analogous ceremonies.

In ref. (2), Nino Cortese describes the occasions in which an official lecture was read: “*The academic year commenced solemnly with an oration of one of the lecturers; moreover, a custom which was common in the previous century was saved according to which when one of the lecturers was appointed to a chair he had to read a real opening lecture.*”

The opening lecture was a custom common in Salamanca too and it became a tradition which was formalised in Spain with a Royal Decree on 20th August 1859, whereas in Naples it remained an internal rule of the University.

Going back to the assignment procedure, we must say that it did not always take place through a public competition; in fact, in 1703 the viceroy, marquis of Villena, ought to state again that public competitions were absolutely necessary and obliged those who had been appointed lecturers without a regular competition to undergo such a procedure. In the same occasion, Villena ordered that every professor expounded during the competition a general conclusion on the subject he would read (one must recall that the lesson was

(2) F. TORRACA, *Storia della Università di Napoli* (Riccardo Ricciardi Editore, Napoli) MCMXXIV.

(*) Short cloak; the popes, in ceremonies, use a white one.

divided into two parts; in the first the lecturer dictated, in the second one he explained).

The Studium followed these rules until 1707, when the reign was occupied by Austrians for twenty-seven dark years and the palace of the Studium was occupied by the Austrian Army troops. The lectures went back to be given again in the cloister of the monastery of St. Domenico Maggiore, as it used to be before 1615. The limited space made the didactics difficult but, despite the Major Chaplain's petitions to the authorities⁽³⁾, the situation did not change.

In 1735 the Reign got its independence again, the king ordered that the seat of the Studium had to be restored, and in November 1736 the academic year was opened with an inaugural lecture given by Giovan Battista Vico, royal lecturer of the science of rhetoric. All the *lectiones magistrales* we mentioned were given in Latin.

In 1754 something happened which changed this rule. A Tuscan mathematician, Bartolomeno Inferi, who was living in Naples, as administrator of the possessions of the Medici and Corsini families, offered to the court to establish and finance a chair with a salary of 300 ducats, gained from a bank capital of 7500 ducats, on condition that the teaching language were Italian. The proposal met several difficulties, but in the end it was approved and on 5th November 1754 Antonio Genovese obtained the chair of economic philosophy and civil economy, which was the first chair of public economy in Europe, giving a *lectio magistralis* in front of a very large number of people.

In the second half of the XVIII century no special changes occurred, apart from a very slight opening to the scientific disciplines. In 1777 the Studium was moved to bigger spaces that had been made available after the expulsion of the Jesuits in 1767. In 1799 the Studium was temporarily closed after the "glorious" Christian army of the Cardinal Ruffo di Calabria entered Naples and repressed the Neapolitan revolution when seven professors were hung and eleven arrested.

The transition to a modern university was performed in 1806, when the French arrived, by Giuseppe Bonaparte who established in the University of Naples the classes of law, theology, medicine, natural sciences, different chairs, and philosophy—the latter associated with the chairs of logic and metaphysics, of elementary mathematics, transcendental mathematics, mechanics, experimental physics and astronomy; there was finally a class of different chairs.

Even more modern was the innovation introduced by Gioacchino Murat, who on the basis of an accurate analysis carried out by a committee of which Vincenzo Cuoco was a member, introduced, with a decree in 1811, the Faculties, among which physical and mathematical sciences, with the chairs of synthetic mathematics, analytical mathematics, calculus of the infinities, heuristic art or art of the mathematical invention, mechanics, experimental physics (with a laboratory and an assistant), zoology, botany (with a botanic garden), vegetal physiology, natural history (with a compulsory course of compared anatomy and with a museum kept by a professor who was in charge of the

⁽³⁾ I. ASCIONE, *L'Università di Napoli nei documenti del '700 (1690-1734)* (Edizioni Scientifiche Italiane) 1997.

class in natural iconography), mineralogy (with a mineralogical cabinet and a laboratory), chemistry (with a cabinet and an assistant in charge of the class of pharmacy) and astronomy (with an observatory and two assistants).

In the same decree Murat reformed the competitions in the following way:

- different boards of examiners were formed according to the disciplines' type: for instance, science was joined to medicine (formerly there was only one board of examiners for all the disciplines);
- applicants sent the Chancellor a written paper, in which they explained their experiences and ideas, put inside a folder containing a sealed envelope with their name;
- the written paper was examined by a secretary: if the paper was disapproved the envelope was burnt;
- the authors of the approved papers had to undergo an examination similar to those which were used in the past;
- in the end, the members of the commission wrote their secret mark and the result was sent to the governmental authorities and from them to the king who signed the nomination decree.

It was certainly kept the rule according to which the new professor read his inaugural lesson (*lectio magistralis*) in front of the members of the faculty and invited people. This tradition has been kept until the second world war, but it was gradually abandoned (in Salamanca already in 1973). For instance, no one of the physicists who won the chair after Majorana read the inaugural lesson, whereas in the humanistic faculty some were still given in 1992 and 1993.

2. Majorana: the appointment to the chair and his *lectio magistralis*

After the 1926 competition, in which Fermi, Persico and Pontremoli were appointed professors, ten years passed before a new competition for theoretical physics was announced in 1937; it was required by the University of Palermo on the initiative of Emilio Segré. Ettore Majorana too decided to apply to the competition (either on his own initiative or because he was invited to do so by his friends). This decision may appear strange to those who know Majorana's temper, who was so far away from academic interests. However, we got an explanation during the last few months. Let us first recall that when Majorana came back from Leipzig at the end of 1933, he took the distances from Fermi's group, but not from physics, as testified by a large number of documents⁽⁴⁾. Moreover, De Gregorio⁽⁵⁾ has recently discovered, at the University of Rome "La Sapienza", that during the time when he lived in isolation, namely in the academic years 1933/34, 1934/35 and 1935/36, Majorana had asked for the opportunity to deliver a "free" university course at the Institute in via Panisperna, which was his right since he was "Libero Docente", namely qualified for university teaching. His requests were approved by the

⁽⁴⁾ E. RECAMI, *Il Caso Majorana: Epistolario, Documenti, Testimonianze* (Mondadori, Milan) 1987, 1991; see the IV updated edition (Di Renzo Editore, Rome) 2002.

⁽⁵⁾ A. DE GREGORIO and S. ESPOSITO, in *Sapere*, no. 3, June 2006, 56; see also *Teaching theoretical physics: The cases of E. Fermi and E. Majorana*, preprint [arXiv:physics/0602146](https://arxiv.org/abs/physics/0602146).

Director Corbino, but Majorana never gave any lecture, probably because of the lack of students able, at that time, to understand the importance of his lectures.

Majorana was very interested in teaching what his prodigious mind was discovering about the laws of nature. It is likely that he applied to the competition just to finally have his own students (whom he always took care of, as we are going to see). As we know, after the proposal of the commission in charge of the competition, chaired by Fermi, on November 2nd 1937, the Minister Bottai issued the act of appointment for Majorana as full professor of theoretical physics, at the Royal University of Naples, out of competition. At the end of 1937, Majorana was informed by the Minister of this appointment at his dwelling place in viale Regina Margherita 37, in Rome, with this explanation: “*for the high reputation You achieved in the study of the mentioned discipline, as from November 16th 1937-XVI.*” Majorana went to Naples after the Epiphany (around January 10th 1938), and on January 12th he writes from his university seat to Minister Bottai saying, among other things, “*I wish to affirm that I shall devote all my energies to the Italian school and science, today in such a successful ascension*(⁶).”

Majorana’s letters, which are relevant also for the circumstances in which Majorana disappeared, are contained in ref. (⁴). We will briefly mention only those which are of interest in this section. In his letter to his mother dated January 11th 1938 from Naples, Majorana wrote: “*I announced the beginning of the course for next Thursday 13th at nine. But it hasn’t been possible to check if there is overlapping with other classes, thus it is likely that students will not come and we will need to postpone the beginning of the course. I spoke to the dean and we agreed on avoiding any formal character to the inauguration of the course, also for this reason I should suggest you not to come...*”. Majorana’s family, on the contrary, was punctual on Thursday January 13th 1938, at nine, at Majorana’s inaugural lecture. The professors of the faculty were present at the lesson, among whom certainly Antonio Carrelli and Renato Caccioppoli, who were very good friends; as Gilda Senatore recalls, students were not invited.

The notes for the opening address to the course, or inaugural lecture, have been discovered by one of us [E.R.] about 1972 and have been made public for the first time ten years later(⁷)(⁸). In the mentioned notes all the interest of the scientist appears, not only for the general and basic issues which animate the scientific research, but also for the best *didactic method* to follow in order to pass on his knowledge to the students (for

(⁶) The documents, discovered and published for the first time by E. Recami are present in ref. (⁴). They all are protected by copyright (including the photographs) held by E. Recami, the Majorana family and presently by the publisher Di Renzo. Any reproduction of these documents is forbidden without written permission of the copyright holders (exception is obviously made for the *scientific papers*).

(⁷) E. RECAMI, in *Corriere della Sera* (Milano), 19 Ottobre 1982. See also refs. (⁴) and (⁸).

(⁸) B. PREZIOSI (Editor), *Ettore Majorana - Lezioni all’Università di Napoli* (Bibliopolis, Napoli) 1987. The volume contains, besides a comment by N. Cabibbo, also an article by E. Recami which includes the notes for the inaugural lecture and a catalogue of all the unpublished scientific papers by Majorana (edited by M. Baldo, R. Magnani and E. Recami); for the catalogue see also E. RECAMI, in *Quaderni di Storia della Fisica*, no. 5 (1999), 19-68.

whom he had a deep care).

The notes of Majorana's inaugural lecture reveal several aspects of his scientific and human qualities. We wish to warn that they concern classical physics and quantum mechanics: in this first stage relativistic aspects were neglected. These aspects are examined in the second half of Majorana's course, as revealed by the notes of his last six lessons which have been recently discovered. Majorana was so particularly fascinated by the antimechanicistic and probabilistic description of quantum mechanics, that he discusses it widely also in his posthumous article⁽⁹⁾ published in 1942 by Giovannino Gentile. On July 27th 1934 from Monteporzio Catone (Rome) he had written to Gentile himself: "*I think that the major merit of Jeans' book⁽¹⁰⁾ is to anticipate the psychological reactions which the new development of physics will fatally produce when everybody understands that science has stopped being a justification for the vulgar materialism.*"

Since the myth has associated the death of Majorana with the fear of the construction of the atomic bomb, we can say immediately that from the very beginning of his inaugural lecture Ettore says openly: "*Atomic physics, which will be the main subject of my discussion, despite its important and numerous practical applications —together with those of a wider and maybe revolutionary impact that the future may have in store—, is first of all a science of immense speculative interest for the depth of its investigation that really reaches the extreme roots of natural facts.*" Majorana's words make us understand that, despite the probable "revolutionary" applications which nuclear and atomic physics could have led to, they interested him mainly from the speculative point of view.

3. Lectures in his theoretical physics course

As testified by Gilda Senatore and Sebastiano Sciuti, his course was attended, from January 15th onwards, by themselves and by Nella Altieri, Laura Mercogliano, Nada Minghetti and Savino Coronato, the latter being one of Caccioppoli's students; after the last lecture he no longer attended the Physics Institute and took his degree in mathematics in the same year. Nobody else attended his lectures, apart from a few occasional presences of Mario Cutolo, who had already graduated in physics.

Majorana took much care of his students, and appreciated them. In fact, in the last letter to his friend and colleague Giovanni Gentile jr, he wrote: "*I am satisfied with my students; some of them seem determined in approaching physics seriously.*" When the chalk was in his hands, his bashfulness disappeared and entire blackboards were easily filled with elegant physical and mathematical symbols. This behaviour has been recalled by Gilda Senatore in a TV interview performed by Bruno Russo, and, more recently, at the meeting organized by the University of Naples Federico II on the occasion of the 60th anniversary of his disappearance.

⁽⁹⁾ E. MAJORANA, "Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali", *Scientia* **36** (1942) 58-66.

⁽¹⁰⁾ J. JEANS, *I Nuovi Orizzonti della Scienza* (Sansoni, Firenze) 1934, Italian translation by G. Gentile jr.

All the autograph notes of his lectures, written with care by Majorana, as aids for his students (maybe Ettore had in mind to write a book for his students, in the same way as he did when he wrote his original study notes, the “*Volumetti*”⁽¹¹⁾), were left in safekeeping, the day before going to Palermo, to his favorite pupil Gilda Senatore, together with some other writings which were no more found. A letter by Preziosi published in “*Le Scienze*” (September 2002) and ref. ⁽¹²⁾ explain how those lecture notes happened to be in Carrelli’s hands between the end of 1938 and the beginning of 1939, and in which occasion were then sent to E. Amaldi, unfortunately without six lessons on electrodynamics and special relativity. It is interesting to notice that in 1939-1940 Carrelli taught special relativity and the related notes were published by GUF in 1940. The notes sent to Amaldi and deposited at the Domus Galilaeana were published anastatically in ref. ⁽⁸⁾.

Recently, S. Esposito⁽¹³⁾ and A. Drago have found, among the papers left by Eugenio Moreno, a student in Mathematics who took his degree with Caccioppoli in 1941, a personally handwritten copy of all Majorana’s manuscripts, including the part relative to special relativity, absent in the papers deposited at the Domus Galilaeana. Indeed, Gilda Senatore recalls that this part was present in the original notes given to her by Majorana himself. Such notes, now, are all present in ref. ⁽¹⁴⁾.

BRUNO PREZIOSI
 Università di Napoli
 ERASMO RECAMI
 Università di Bergamo

⁽¹¹⁾ S. ESPOSITO, E. MAJORANA jr, A. VAN DER MERWE and RECAMI E., *Ettore Majorana - Notes on Theoretical Physics* (Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston e New York) 2003. (Edition in the original Italian language: E. MAJORANA, *Appunti inediti di fisica teorica*, edited by Esposito S. e Recami E. (Zanichelli, Bologna) 2006.).

⁽¹²⁾ *L’eredità di Fermi e Majorana ed altri temi* (Bibliopolis, Napoli) 2006.

⁽¹³⁾ S. ESPOSITO, *Nuovo Saggiatore*, **21** No. 1-2 (2005) 21-41.

⁽¹⁴⁾ S. ESPOSITO (Editor), *Ettore Majorana - Lezioni di Fisica Teorica* (Bibliopolis, Napoli) 2006.