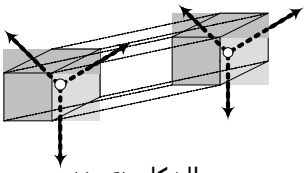
الفصل السادس

حركة منظومة جسمات

(Motion of System of Particles)

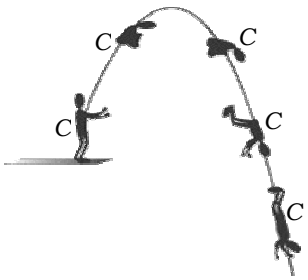
6-1 تمهيد: مركز الكتلة *(center of mass)*

خلال دراستنا لحركة وتحريك الأجسام لم نعر حجمها أو أبعادها أي اهتمام، واكتفينا بتمثيلها في أغلب الأحيان بنقطة أو دائرة صغيرة أو مستطيل. وافترضنا أن القوى المؤثرة على الجسم تمر كلها من نقطة واحدة تقع في منتصفه، كما في الشكل (6-1).



الشكل (6-1)

إلا أن هذا التبسيط غير صحيح في كل الأحوال إذ لايوجد جسم صغير لدرجة يمكن تمثيله بنقطة واحدة، ولو نظرنا لجسم كبير يتحرك بشكل انتقالي (أو انسحابي *translational*) فقط لوجدنا أن كل نقطة منه تتحرك بنفس الشكل تماما، وبالتالي فإن اعتبار هذا الجسم مكافئ لنقطة واحدة ممكن في هذه الحالة. إلا أنه لو كان لدينا جسم كبير يتحرك عشوائيا (كانتقال ودوران) لتحركت كل نقطة منه بشكل مختلف عن غيرها كشخص يقفز للماء، كما في الشكل (6-2)، فنلاحظ أن كل نقطة منه تتحرك بشكل معقد بحيث تدور وتنتقل بنفس الوقت ولايتحرك على مسار القذيفة القطعي الذي وجدناه في الفصل الثالث. لكن لو أمعنا النظر في الشكل (6-2) لرأينا نقطة معينة من

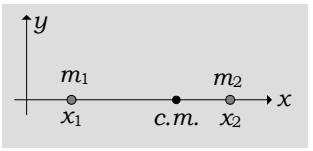


الشكل (6-2)

الجسم، C، تتحرك فعلا على مسار قطع مكافئ، وكأنها جسم يطير تحت تاثير الجاذبية. نطلق على هذه النقطة اسم **مركز الكتلة** *(center of mass)* والتي تبدو وكأن كل الجسم متجمع عندها وخاضعة لمحصلة القوى المؤثرة عليه. وسندرس في هذا الفصل كيف نحدد موضع مركز كتلة مجموعة نقاط صغيرة أو جسم كبير ثم نستخلص المعادلات التي تحدد كيف يتحرك هذا المركز وتطبيقاتها على حركة منظومة كبيرة.

2-6 مركز كتلة جسيمين نقطيين

نقول إن لدينا جسيم نقطي (أي صغير جدا) إذا كانت أبعاده من طول وعرض وارتفاع صغيرة جدا بالمقارنة مع بعده عنا، كالنجوم التي نراها في السماء التي نعتبرها نقاطا مضيئة لكنها في الواقع أكبر من أرضنا بملايين المرات. لنعتبر إذا جسيمين نقطيين (أي أن المسافة بينهما كبيرة جدا بالمقارنة مع أبعاد أي منهما) m_1 وm_2 في الموضعين x_1 و x_2 على محور السينات، على الترتيب، بالنسبة لمراقب موجود عند نقطة المبدأ، كما في الشكل (3-6). عندئذ نعرف مركز كتلة هذين الجسيمين بالنسبة لهذا المراقب بالعلاقة:



الشكل(3-6)

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) \qquad (1\text{-}6)$$

حيث وضعنا الكتلة الكلية $M = m_1 + m_2$.

مثل 6-1

أين يقع مركز كتلة جسيمين نقطيين m_1=1 kg و m_2=4 kg يبعدان عن بعضهما 3m؟

الحل: نعتبر الخط الواصل بين الجسيمين محور السينات، كما نضع نقطة المبدأ (أي موضع المراقب الذي يحدد مركز كتلتهما) عند m_1 مثلا، فيصير إحداثي الجسيم الأول x_1=0 والثاني x_2=3 m. ثم نستخدم العلاقة (6-1) ونكتب:

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2\text{ kg})(0) + (4\text{ kg})(3\text{ m})}{6\text{ kg}} = 2\text{ m}$$

فمركز الكتلة يبعد 2 m عن الجسيم m_1.

3-6 مركز كتلة عدة جسيمات

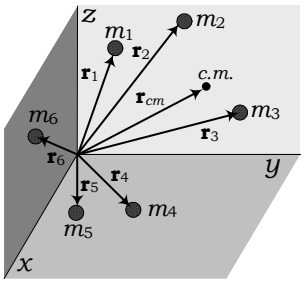
يمكن تعميم العلاقة (6-1) لتحديد موضع عدة جسيمات m_1 و m_2 و... m_3، موجودة في الفضاء عند المواضع $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ ... ، على الترتيب، كما في الشكل (6-4).

عندئذ نجد مركز الكتلة من العلاقة:

$$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i \qquad (2\text{-}6)$$

وبأخذ مركبات العلاقة الأخيرة على المحاور ox و oy و oz نجد مركبات موضع مركز الكتلة:

$$\begin{aligned} x_{c.m.} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_{c.m.} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_{c.m.} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned} \qquad (3\text{-}6)$$



الشكل (6-4)

مثل 6-2

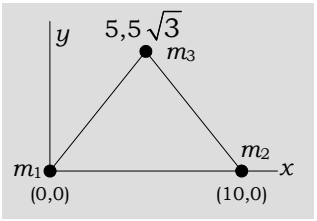
جد مركز كتلة التوزع الآتي: m_1=1 kg عند (1,2,2) وm_2=0.5 kg عند (0,2,1) وm_3=2 kg عند (1,0,0–) و m_4=1.5 kg عند (2–, 1, 2).

الحل: باستعمال العلاقات (3-6) نكتب:

$$\begin{aligned} x_{c.m.} &= \frac{1((1) + 0.5(0) + 2(-1) + 1.5(2)}{1 + 0.5 + 2 + 1.5} = 0.4 \text{ m} \\ y_{c.m.} &= \frac{1((2) + 0.5(2) + 2(0) + 1.5(-1)}{1 + 0.5 + 2 + 1.5} = 0.3 \text{ m} \\ z_{c.m.} &= \frac{1((2) + 0.5(1) + 2(0) + 1.5(-2)}{1 + 0.5 + 2 + 1.5} = -0.1 \text{ m} \end{aligned}$$

مثل 3-6

جد موضع مركز كتلة ثلاث كتل m_1=1 kg و m_2=2 kg و m_3=3 kg موضوعة على رأس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 10 cm، كما في الشكل (5-6).



الشكل (5-6)

الحل: لنختر المحورين ox وoy، كما في الشكل (5-6)، فتكون إحداثيات الكتل هي (0,0) و (10,0) و $(5,5\sqrt{3})$.

وباستعمال العلاقات (3-6) نكتب:

$$x_{c.m.} = \frac{1(0) + 2(10) + 3(5)}{1 + 2 + 3} = 5.8 \text{ cm}$$

$$y_{c.m.} = \frac{1(0) + 2(0) + 3(5\sqrt{3})}{1 + 2 + 3} = 4.3 \text{ cm}$$

ويجدر التنويه إلى أن **موقع مركز الكتلة لايعتمد على طريقة اختيارنا للمحاور الإحداثية**، بل على نوع وتوزع الجسيمات المؤلفة للنظام المدروس فقط. ففي المثال السابق سيبقى موضع مركز الكتلة نفسه سواء اخترنا المحاور بالطريقة أعلاه أو غيرها، ويبقى بعده عن الخط الواصل بين الكتلتين m_1 و m_2 (أي $y_{c.m.}$) مساويا إلى 4.3 cm دوما.

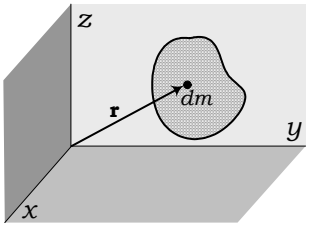
4-6 مركز كتلة جسم صاب، الكثافة *(density)*

تتألف الأجسام الصلبة من عدد كبير من الجسيمات بحيث يمكن اعتبارها توزعا مستمرا للكتلة الكلية M للجسم على حجمه الكلي V. ولذلك لتحديد موضع مركز كتلة الجسم في هذه الحالة نعتبره مجموعةمن الجسيمات الصغيرة جدا Δm_i يتحدد موضع كل منها بمتجه $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$، ومن ثم نجد موضع الكتلة بالعلاقات التقريبية التالية:

$$\begin{cases} X_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}(\Delta m_i)x_i \\ Y_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}(\Delta m_i)y_i \\ Z_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}(\Delta m_i)z_i \end{cases} \qquad (4\text{-}6)$$

وتعتبر العلاقات المذكورة تقريبية لأن كل كتلة عنصرية Δm_i تحتل حجما صغيرا في الجسم الصاب، بينما يحدد المتجه $\mathbf{r}_i$ موضع نقطة واحدة منه وليس موضع كل نقاطه. فإذا أردنا جعل

العلاقات (4-6) أكثر دقة وجب علينا جعل الكتلة العنصرية Δm_i أصغر مايمكن بحيث يمكن اعتبارها نقطية نرمز لها عندئذ بـ dm، كما في الشكل (6-6)، ممايجعل عددها كبيرا جدا ويتناهى المجموع في العلاقات (4-6) إلى تكامل من الشكل:



الشكل (6-6)

$$\begin{cases} X_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\lim\limits_{\Delta m_i \to 0}\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta m_i)x_i = \dfrac{1}{M}\int_V x dm \\ Y_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\lim\limits_{\Delta m_i \to 0}\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta m_i)y_i = \dfrac{1}{M}\int_V y dm \\ Z_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\lim\limits_{\Delta m_i \to 0}\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta m_i)z_i = \dfrac{1}{M}\int_V z dm \end{cases} \quad (5\text{-}6)$$

ويمكن كتابة هذه العلاقات بالاستفادة من مفهوم الكثافة إذ تختلف الأجسام الصلبة عن بعضها بحسب نوعها. فهناك عناصر ثقيلة وأخرى خفيفة ومايميزها عن بعضها هو كثافتها التي نعرفها بكمية الكتلة الموجودة في واحدة الحجم، أي

$$\boxed{\rho = \frac{M}{V}} \quad (6\text{-}6)$$

وإذا كان الجسم مركب من عناصر مختلفة أو بتوزع غير متجانس عندئذ نعرف كثافة كتلة عنصرية Δm بالشكل:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (7\text{-}6)$$

وإذا كانت Δm صغيرة جدا عندئذ يصير حجمها ΔV صغيرا جدا أيضا وتؤول العلاقة السابقة إلى:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (8\text{-}6)$$

وبالتعويض عن dm في العلاقات (5-6) تصير إحداثيات مركز الكتلة معطاة بالشكل:

$$\boxed{\begin{cases} X_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\int_V \rho x dV \\ Y_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\int_V \rho y dV \\ Z_{c.m.} = \dfrac{1}{M}\int_V \rho z dV \end{cases}} \quad (9\text{-}6)$$

فتحديد موضع مركز كتلة جسم صلب ليس سهلا بل قد يكون غاية في التعقيد لأنه يعتمد على شكل الجسم وكيفية توزع الكتلة فيه. لذا نكتفي في هذا الكتاب بالأجسام ذات الكثافة المنتظمة وفق العلاقة (6-6) فقط، ويمكن البرهان عندئذ أن **مركز كتلة جسم متجانس ينطبق على مركزه الهندسي**. فإذا كان لدينا كرة صلبة متجانسة فإن مركز كتلتها يقع في مركزها الهندسي. بينما لو كانت غير متجانسة، أي مؤلفة من عناصر مختلفة عندئذ من المحتمل أن لايقع مركز كتلتها في مركزها الهندسي بالضرورة.

5-6 حركة مركز الكتلة

سندرس في هذه الفقرة كيف يتغير موضع مركز كتلة منظومة عندما تتحرك أجزاؤها تحت تأثير قوى مختلفة. فنفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من عدد من الجسيمات m_1 و m_2 وm_3 .. و m_n متواجدة عند $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و$\mathbf{r}_3$ .. و $\mathbf{r}_n$، على الترتيب. عندئذ نكتب متجه موضع مركز الكتلة بكتابة العلاقة (6-2) بالشكل:

$$M\mathbf{R}_{c.m.} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n \qquad (10\text{-}6)$$

وباشتقاق طرفي العلاقة السابقة نجد:

$$M\frac{d\mathbf{R}_{c.m.}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

حيث نلاحظ أن $d\mathbf{r}_i/dt = \mathbf{v}_i$ سرعة الجسيم i، كما أن $d\mathbf{R}_{c.m.}/dt = \mathbf{V}_{c.m.}$ هي سرعة مركز الكتلة. ولذا نكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$\boxed{M\mathbf{V}_{c.m.} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n} \qquad (11\text{-}6)$$

وتربط هذه النتيجة بين سرعة مركز كتلة منظومة والأجزاء المؤلفة لها.

وبنفس الشكل نجد تسارع مركز الكتلة باشتقاق (6-11):

$$M\frac{d\mathbf{V}_{c.m.}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{v}_n}{dt}$$

ولكن $d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{a}_i$ هو تسارع الجسيم i، كما أن $d\mathbf{V}_{c.m.}/dt = \mathbf{a}_{c.m.}$ تسارع مركز الكتلة، فيكون:

$$M\mathbf{a}_{c.m.} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \cdots + m_n\mathbf{a}_n \qquad (12\text{-}6)$$

لنبحث الآن عن الطريقة التي يتحرك بها مركز الكتلة عندما تخضع أجزاؤها لقوى مختلفة. فنلاحظ أن الحد $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{a}_i$ يمثل محصلة القوى المؤثرة على الجسيم i من الجسيمات الأخرى والقوى الخارجية عن المنظومة. ولذلك نكتب (6-12) بالشكل:

$$M\mathbf{a}_{c.m.} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = (\mathbf{F}_{ext})_T \qquad (6\text{-}13)$$

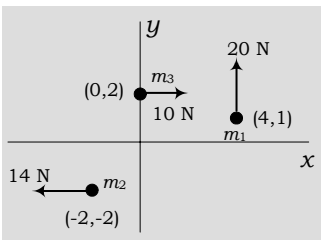
حيث تمثل $(\mathbf{F}_{ext})_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة، بينما نعتبر محصلة القوى المتبادلة بين أجزائها تساوي الصفر بحسب قانون نيوتن الثالث في الفعل ورد الفعل. ومن ثم نكتب قانون نيوتن الثاني لحركة مركز الكتلة من (6-13):

$$\boxed{(\mathbf{F}_{ext})_T = M\mathbf{a}_{c.m.}} \qquad (6\text{-}14)$$

أي أن مركز الكتلة يتحرك وكأنه جسم حقيقي كتلته تساوي كتلة النظام كله ويخضع لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه. إلا أنه يجب الانتباه إلى أن مركز الكتلة ليس إلا مفهوم نظري فقط ولايمثل جسما حقيقيا بحد ذاته. ولو نظرنا لحلقة مفرغة تطير في الهواء مثلا لرأينا أن مركز كتلتها الذي يقع في مركزها الهندسي عبارة عن نقطة في الفراغ ولايوجد هناك شئ مادي، لكننا نقول إن الحلقة تتحرك في الهواء **وكأنها كتلة صغيرة موجودة في ذلك المركز**. ولو نظرنا للمنظومة المؤلفة من الأرض والقمر مثلا للاحظنا أن الأرض تخضع لجذب القمر والشمس وبقية الكواكب في المجموعة الشمسية. وكذلك فإن القمر يخضع لجذب الأرض والشمس وبقية الكواكب. لكن لو اعتبرنا حركة المنظومة المؤلفة من الأرض والقمر معا وتتبعنا حركة مركز كتلتهما للاحظنا أن محصلة القوى عليهما هي قوى جذب الشمس وبقية الكواكب والتي هي قوى خارجية عن هذه المنظومة. أما قوى التجاذب بينهما فمحصلتها الصفر لأنها متساوية ومتعاكسة بين الأرض والقمر.

مثل 6-4

تتحرك الكتل الثلاث m_1=1 kg و m_2=2 kg و m_3=3 kg الموضحة في الشكل (6-7) بدءا من السكون تحت تأثير القوى المبينة. ماموضع وتسارع مركز الكتلة لحظة البداية؟



الشكل (6-7)

الحل: نحدد موضع مركز الكتلة لحظة البدء بكتابة:

$$\mathbf{r}_{c.m.} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3)$$

وبأخذ مركبات العلاقة السابقة على ox و oy نجد:

$$x_{c.m.} = \tfrac{1}{6}[1(4) + 2(0) + 3(-2)] = -0.33 \text{ m}$$
$$y_{\text{c.m.}} = \tfrac{1}{6}[1(1) + 2(2) + 3(-2)] = -0.17 \text{ m}$$

كما نكتب تسارع مركز الكتلة بكتابة:

$$M\mathbf{a}_{c.m.} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

ونأخذ مركباتها أيضا:

$$6a_x = 0 + 10 - 14 = -4 \;\Rightarrow\; a_x = -0.67 \text{ m/s}^2$$
$$6a_y = 20 + 0 - 0 = 20 \;\Rightarrow\; a_y = 3.33 \text{ m/s}^2$$

فتصير قيمة التسارع:

$$a_{c.m.} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 3.40 \text{ m/s}^2$$

ونحدد اتجاهه بالزاوية θ التي يصنعها مع محور السينات:

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = -5 \;\Rightarrow\; \theta \approx -79°$$

6-6 الزخم الخطي *(Linear Momentum)*

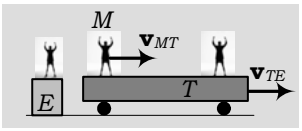
لنفترض أنك تلعب مع صديقك في الشارع عندما ترى سيارة تتجه نحوك بسرعة ما بنفس الوقت الذي يقذف صديقك كرة باتجاهك بنفس السرعة. فأيهما ستقرر أن تلتقط ياترى؟ لاشك بأنك تبتعد عن السيارة بسبب كتلتها الكبيرة بالمقارنة مع الكرة ولو أن لهما نفس السرعة. وماذا يحدث لو استبدلنا رصاصة صغيرة جدا لكن سرعتها كبيرة بدلا من السيارة. أيضا ستقرر الابتعاد عنها لأنها سريعة جدا. نلاحظ إذا أن المهم في العملية ليست كتلة الجسم المتحرك أو سرعته فقط بل كلاهما. وقد اصطلح على تعريف كمية فيزيائية تحويهما تسمى **الزخم الخطي** للتعبير عن تأثير شئ ما على غيره. وهذه الكلمة العربية جميلة وتفي بالغرض تماما لأنها تعبر فعلا عما نقصده منها. فعندما تسمع أن نشاطا ما له زخم عال فإنك تستنتج مباشرة أنه مجدي وفعال. فإذا كان لدينا جسم كتلته m يتحرك بسرعة $\mathbf{v}$ فإننا نعرف زخمه الخطي بالعلاقة:

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}} \qquad (15\text{-}6)$$

وقد كان من الشائع استعمال **كمية التحرك** *(quantity of motion)* لكن المصطلح العلمي العالمي المتفق عليه الآن لـ **p** هو الزخم الخطي. ونلاحظ من العلاقة السابقة أن الزخم الخطي كمية متجهة ووحدته kg.m/s. كما يعتمد، مثل السرعة، على المراقب الذي يدرس حركة الجسم، أي على منظومة المحاور الإحداثية التي تتحدد السرعة بالنسبة لها، كما هو موضح بالمثل التالي.

مثل 6-5

يسير قطار بسرعة 10 m/s على سكة مستقيمة. ما الزخم الخطي لراكب كتلته 60 kg يركض داخل القطار بسرعة 2 m/s بالنسبة لراكب ساكن فيه ومودع يقف على رصيف المحطة، كما في الشكل (6-8)؟



الشكل(6-8)

الحل: يوضح الشكل(6-8) المتحرك داخل القطار ومراقبيه A وB حيث افترضنا أن الشخص يركض بنفس اتجاه حركة القطار. ونكتب الزخم الخطي للرجل بشكل عام $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ حيث نلاحظ أن سرعته بالنسبة للراكب في القطار υ_{MT} هي υ_{MT}=2 m/s، ويصير زخمه الخطي:

$$P_{MT} = m\upsilon_{MT} = (60\,\text{kg})(2\,\text{m/s}) = 120\,\text{kg.m/s}$$

أما الزخم الخطي للراكب بالنسبة لمودع على رصيف المحطة فنجده من سرعته بالنسبة للقطار υ_{MT} وسرعة القطار بالنسبة للأرض υ_{TE}، ونكتب:

$$\upsilon_{ME} = \upsilon_{MT} + \upsilon_{TE} = 2 + 10 = 12\ \text{m/s}$$

فيصير الزخم:

$$p_{ME} = (60\,\text{kg})(12\,\text{m/s}) = 720\,\text{kg.m/s}$$

7-6 الشكل العام لقانون نيوتن الثاني

عرفنا الزخم الخطي في الفقرة السابقة بالعلاقة:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

وباشتقاق طرفي هذه العلاقة نجد:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

وبفرض أن الكتلة m ثابتة يكون:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

لكن $m\mathbf{a}$ هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم $(\mathbf{F}_{ext})_T$، لذا يصير مشتق الزخم الخطي هو:

$$(\mathbf{F}_{ext})_T = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (16\text{-}6)$$

فمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على جسم تساوي معدل تغير زخمه الخطي بالنسبة للزمن. هذا هو **الشكل العام لقانون نيوتن الثاني**.

ويمكن تعميم العلاقة السابقة على منظومة مؤلفة من عدة جسيمات أو جسم صلب حيث نشتق العلاقة(2-6) فنجد:

$$M\frac{d\mathbf{R}_{c.m.}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

وبتعويض

$$\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i / dt \;\Rightarrow\; \mathbf{p}_i = m_i d\mathbf{r}_i / dt$$

و

$$\mathbf{V}_{c.m.} = d\mathbf{R}_{c.m.} / dt \;\Rightarrow\; \mathbf{P}_{c.m.} = Md\mathbf{R}_{c.m.} / dt$$

نجد

$$\mathbf{P}_{c.m.} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n \qquad (17\text{-}6)$$

فالزخم الخطي لمركز الكتلة يساوي الزخم الخطي الكلي للمنظومة.

ونحصل على الشكل العام لقانون نيوتن الثاني للمنظومة باشتقاق (6-17) بالنسبة للزمن فنجد:

$$\frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\mathbf{p}_n}{dt}$$

لكن $\mathbf{F}_i = d\mathbf{p}_i / dt$ يمثل محصلة القوى (الداخلية والخارجية) المؤثرة على الجسيم i لذا تؤول العلاقة السابقة إلى:

$$\frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$$

وبحسب قانون نيوتن الثالث فإن محصلة القوى الداخلية المتبادلة بين جسيمات المنظومة تساوي الصفر، ولذلك تصير محصلة القوى $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$ هي القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة فقط $(\mathbf{F}_{ext})_T$، وتؤول (6-26) إلى الشكل:

$$(\mathbf{F}_{ext})_T = \frac{d\mathbf{P}_{c.m.}}{dt} \qquad (17\text{-}6)$$

فمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على منظومة جسيمات تساوي معدل تغير الزخم الخطي لمركز الكتلة بالنسبة للزمن. هذا هو **الشكل العام لقانون نيوتن الثاني لمنظومة جسيمات** (أو جسم صلب).

8-6 مبدأ حفظ الزخم الخطي

إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على منظومة مساوية للصفر خلال فترة معينة من الزمن فإننا نجد من (6-17) أن:

$$(\mathbf{F}_{ext})_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{c.m.} = \text{ثابت} \tag{18-6}$$

ونستنتج من هذه العلاقة أنه إذا كانت محصلة القوى الخارجية المؤثرة على منظومة تساوي الصفر فإن الزخم الخطي لمركز الكتلة، أي الزخم الخطي الكلي، لايتغير خلال هذه الفترة. يطلق على هذه النتيجة اسم **مبدأ حفظ الزخم الخطي** *(conservation of linear momentum)*.

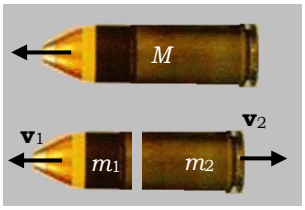
وتكمن أهمية هذا المبدأ عندما يتغير الزخم الخطي لجزء من منظومة خاضعة لمحصلة قوى مساوية للصفر، إذ يجب أن يتغير الزخم الخطي لأجزاء أخرى منها حتى يبقى الزخم الخطي الكلي ثابت.

كما نلاحظ أن المعادلة (6-18) هي علاقة متجهة بمعنى أنه إذا كانت لمحصلة القوى على محور ما مركبة مساوية للصفر فإن مركبة الزخم الخطي الكلي على ذلك المحور لاتتغير، أي أن:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{ext})_{Tx} = 0 \quad &\Rightarrow \quad (P_{c.m.})_x = \text{ثابت} \\ (\mathbf{F}_{ext})_{Ty} = 0 \quad &\Rightarrow \quad (P_{c.m.})_y = \text{ثابت} \\ (\mathbf{F}_{ext})_{Tz} = 0 \quad &\Rightarrow \quad (P_{c.m.})_z = \text{ثابت} \end{aligned} \tag{19-6}$$

ولابأس من الإشارة إلى أن مبدأ حفظ الزخم الخطي صحيح في حالة مراقب ثابت بالنسبة للجسم أو المنظومة المدروسة طالما بقيت محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليها مساوية للصفر. فقد يقرر عدة مراقبين قيما مختلفة للزخم الخطي لجسم، كل بحسب سرعة الجسم بالنسبة له، لكنهم يقررون جميعا أن هذا الزخم لايتغير (بالنسبة لكل واحد منهم) طالما بقيت القوى الخارجية معدومة.

مثل 6-6



الشكل (6-8)

يتحرك جسم كتلته 8 kg على خط مستقيم بسرعة 2 m/s دون أن تؤثر عليه أي قوة عندما ينشطر لقسمين كتلة إحداهما 3 kg ويتحرك بسرعة 6 m/s بنفس اتجاه الحركة الأصلية للجسم، كما في الشكل (6-8). ماسرعة القسم الثاني واتجاهه؟

الحل: بما أن الجسم لم يكن خاضعا لأي قوة خارجية قبل الانشطار، وخلال الانشطار يؤثر كل قسم على الآخر بقوة مساوية ومعاكسة للقوة التي يخضع لها منه، كما في الشكل (6-8)، وفق قانون نيوتن الثالث، فتبقى محصلة القوى معدومة. ولذلك يكون الزخم الخطي للمنظومة ثابتا ونكتب:

$$\mathbf{P}\text{(قبل الانشطار)} = \mathbf{P}\text{(بعد الانشطار)}$$

حيث

$$\mathbf{P}\text{(قبل الانشطار)} = M\mathbf{v}$$

و

$$\mathbf{P}\text{(بعد الانشطار)} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

ومن ثم نكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي:

$$M\mathbf{v} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

أي أن

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{m_2}(M\mathbf{v} - m_2\mathbf{v}_2)$$

وباعتبار الاتجاه الموجب مع السرعة الأصلية للجسم **v**، نجد:

$$v_2 = -0.4\,\mathrm{m/s}$$

فسيتحرك القسم الثاني بالاتجاه السالب أي بعكس الحركة الأصلية للجسم.

مثل 6-7

يبدأ رجل كتلته 70 kg بالسير بسرعة 1 m/s على عربة ساكنة كتلتها 1000 kg، بالنسبة لرصيف المحطة، ويتوقف بعد قطع مسافة 10 m على العربة. كيف تتحرك العربة وما المسافة التي تقطعها بالنسبة للرجل وبالنسبة لرصيف المحطة؟ ماذا يحدث بعد أن يتوقف الرجل؟

الحل: نعتبر الرجل والعربة منظومة واحدة فنلاحظ أن زخمها الخطي الكلي قبل أن يسير الرجل على العربة يساوي الصفر. وخلال حركته يكون:

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

حيث m_1 و$\mathbf{v}_1$ وm_2 و$\mathbf{v}_2$ كتلة وسرعة الرجل وكتلة وسرعة العربة بالنسبة لرصيف المحطة (مراقب ثابت)، على الترتيب.

الآن إذا أهملنا الاحتكاك بين العربة والأرض فإن محصلة القوى على المنظومة قبل وبعد حركة الرجل تساوي الصفر لأن لكل من وزن الرجل والعربة رد فعل. أما خلال حركة الرجل فإنه يدفعها بقدمه للخلف بقوة الاحتكاك فتدفعه للأمام بقوة مساوية ومعاكسة (قانون نيوتن الثالث) بحيث أن محصلة هاتين القوتين تساوي الصفر. لهذا يكون الزخم الخطي الكلي للمنظومة ثابتا ونكتب:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0$$

أي أن:

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_1$$

فالعربة تتحرك بعكس اتجاه حركة الرجل بسرعة قيمتها

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = 0.07\,\mathrm{m/s}$$

الآن: لحساب المسافة التي ستقطعها العربة نحسب الزمن الذي يستغرقه الرجل لقطع مسافة 10 m عليها. فنلاحظ أن سرعته بالنسبة للعربة $\mathbf{v}$ هي:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

وبتعويض v_1 وv_2 نجد:

$$v = (1 + m_1/m_2)v_1 = 1.01\,\mathrm{m/s}$$

ومن ثم نجد الزمن اللازم للرجل ليقطع مسافة 10 m على العربة هو:

$$s = vt \quad \Rightarrow \quad t = s/v = 9.90\,\mathrm{s}$$

ولذلك تكون المسافة التي تتحركها العربة على الأرض تساوي:

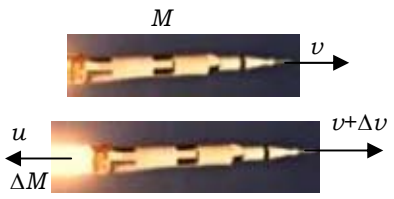
$$s' = v_2 t = (0.07\,\text{m/s})(9.90\,\text{s}) = 0.70\,\text{m}$$

أما المسافة التي تقطعها العربة بالنسبة للرجل الذي تحرك عليها فتساوي مسافته هو أي 10 m. أخيرا، عندما يتوقف الرجل تتوقف العربة أيضا ليبقى الزخم الخطي محفوظا ومساويا للصفر.

9-6 الكتلة المتغيرة وحركة الصواريخ (اختياري)

افترضنا في دراستنا حتى الآن أن الكتلة الكلية للجسم أو المنظومة المتحركة لاتتغير، أما في حركة الصواريخ فإن احتراق الوقود بشكل مستمر يؤدي لتناقص كتلة الصاروخ وتغير زخمه. ونربط في هذه الفقرة بين سرعةالصاروخ وسرعة خروج الوقود منه ومعدل تغير زخمه.

فإذا اعتبرنا صاروخا كتلته الكلية مع وقوده في لحظة ما t هي M ويسير في الفضاء الخارجي بعيدا عن أي مجال جاذبية بسرعة v عندما تعمل محركاته لتنطلق منه كمية من الوقود ΔM بسرعة u بالنسبة للصاروخ خلال زمن Δt، كما في الشكل (9-6)، لتصير كتلة الصاروخ الجديدة $(M - \Delta M)$ وسرعته $(v + \Delta v)$.



الشكل(9-6)

وبما أن النظام معزول عن أي مؤثر خارجي عندما يكون بعيدا عن مجال الجاذبية وأي قوى أخرى لذا يبقى زخمه ثابتا ونكتب:

$$Mv = (M - \Delta M)(v + \Delta v) + (\Delta M)v'$$

حيث v' سرعة خروج الوقود بالنسبة لمراقب ثابت لايتحرك مع الصاروخ. وبإصلاح المعادلة السابقة نجد:

$$\Delta M(v - v') = M\Delta v \qquad (20\text{-}6)$$

حيث أهملنا الحد $\Delta M\Delta v$ لصغره بالمقارنة مع بقية الحدود. وبما أن سرعة خروج الوقود بالنسبة لمراقب خارجي v' تساوي سرعة الوقود بالنسبة للصاروخ u بالإضافة لسرعة الصاروخ بالنسبة للمراقب الخارجي $v + \Delta v$ (مع أخذ الاتجاهات بعين الاعتبار)، أي أن:

$$v' = (v + \Delta v) - u$$

لذا تصير العلاقة (20-6):

$$\Delta M u = M\Delta v$$

وبتقسيم طرفي العلاقة الأخيرة على Δt وأخذ نهاية النسبة عندما $\Delta t \to 0$ نجد:

$$u\frac{dM}{dt} = M\frac{dv}{dt} \tag{21-6}$$

تسمى هذه العلاقة **معادلة الصاروخ الأولى**.

ونكتب العلاقة الأخيرة بشكل مختلف قليلا بوضع $R = dM/dt$ التي تمثل معدل استهلاك الوقود في الصاروخ، كما نضع $a = dv/dt$ تسارع الصاروخ، فنجد:

$$Ru = Ma \tag{22-6}$$

حيث نلاحظ أن الكمية Ru لاترتبط بحركة الصاروخ من سرعة وتسارع بل على تصميمه فقط الذي يتم بحيث ينطلق منه الوقود بمعدل وسرعة معينين.

ولذا نطلق على Ru اسم **النفث** *(thrust)* ويرمز له بـ T . ومن ثم تصير (22-6) على النحو:

$$T = Ma \tag{23-6}$$

أي أن حاصل ضرب كتلة الصاروخ بتسارعه ثابت ويساوي نفثه.

ويمكن معرفة مقدار تغير سرعة الصاروخ عندما تتغير كتلته من M_1 إلى M_2 من (21-6) فنكتب:

$$u\frac{dM}{M} = dv$$

وبمكاملة هذه المعادلة نجد:

$$v_2 - v_1 = u\ln\frac{M_1}{M_2} \tag{24-6}$$

تسمى هذه العلاقة **معادلة الصاروخ الثانية**.

وتفسر النتيجة الأخيرة سبب استخدام الصواريخ ذات المراحل المتعددة إذ يتم التخلص من كل مرحلة بعد استهلاك ماتحويه من وقود فيكتسب الصاروخ سرعة أكبر بتكلفة أقل ويحتفظ بقمرة القيادة فقط في آخر مرحلة من الرحلة.

مثل 6-8

يندفع الوقود من صاروخ كتلته في لحظة معينة 450×10^3 kg بمعدل $R=1.2\times10^3$ kg/s وسرعة 2800 m/s بالنسبة للصاروخ. مانفث الصاروخ وما تسارعه في تلك اللحظة؟

الحل: لحساب نفث الصاروخ نكتب:

$$T = Ru = (1.2\times10^{3}\ \text{kg/s})(2800\ \text{m/s}) = 3.36\times10^{6}\ \text{N}$$

ونجد تسارع الصاروخ الابتدائي بوضع:

$$T = Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T}{M} = 7.47\ \text{m/s}^2$$

ملخص الفصل

مركز كتلة مجموع جسيمات	$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum m_i\mathbf{r}_i$
مركز كتلة جسم صلب	$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{1}{M}\int \rho\mathbf{r}dV$
الزخم الخطي لجسم	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
الزخم الخطي لمركز كتلة عدة جسيمات	$\mathbf{P}_T = \sum \mathbf{p}_i$
الشكل العام لقانون نيوتن الثاني	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$
مبدأ حفظ الزخم الخطي	$\mathbf{F}_T = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_T =$ ثابت
معادلة الصاروخ الأولى	$u\frac{dM}{dt} = M\frac{dv}{dt}$
معادلة الصاروخ الثانية	$v_2 - v_1 = u\ln\frac{M_1}{M_2}$

تمارين ومسائل

مركز الكتلة

1-6 أين يقع مركز كتلة ثلاث كتل قيمة كل واحدة 2.5 kg موجودة على رؤوس مثلث قائم الزاوية طول ضلعيه 2 m و1.5 m؟

2-6 أين يقع مركز كتلة نظام مؤلف من ثلاث كتل متوزعة كما يلي m_1=1 kg في الموضع (0,0) و m_2=1 kg عند (3,0) و m_3=2 kg عند (3,4)؟

3-6 أين يقع مركز كتلة نظام مؤلف من كتلتين m_1=73 kg وm_2=59 kg بينهما مسافة 3.6 m؟

4-6 أين يقع مركز كتلة قطعة معدنية منتظمة على شكل حرف L طول ضلعها الأول 2.5 cm والثاني 3.5 cm إذا أهملنا سمك وعرض أضلاعها؟

5-6 أين يقع مركز كتلة الأرض والقمر إذا كانت المسافة بينهما 3.8×10^{8} m؟

6-6 برهن أن نسبة بعدي جسمين عن مركز كتلتهما تتناسب عكسا مع نسبة كتلتيهما؟

7-6 تنقل طوافة منتظمة ومتجانسة كتلتها 7400 kg طولها 40 m وعرضها 20 m سيارات عبر قناة مائية فتحتل ثلاث سيارات كتلة الواحدة 1400 kg ثلاث زوايا. أين يقع مركز الكتلة؟

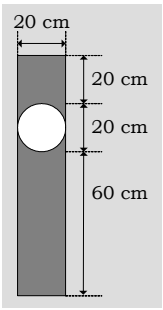
8-6 أين يقع مركز كتلة ثلاثة سطوح متجاورة من مكعب متجانس طول ضلعه L؟

9-6 أين يقع مركز كتلة سطحين متجاورين من مكعب طول ضلعه L إذا كانت كتلة أحدهما ضعف كتلة الآخر؟

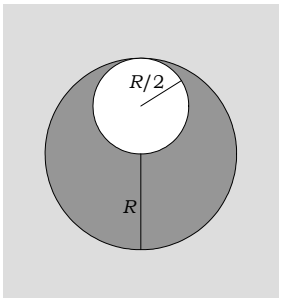
10-6 أين يقع مركز كتلة ثلاثة قضبان متجاورة منتظمة ومتماثلة تشكل حرف U؟

11-6 أين يقع مركز كتلة الجسم المتجانس الموضح بالشكل (6-10)؟

12-6 أين يقع مركز كتلة الكرة الموضحة بالشكل (6-11)؟



الشكل (6-11)

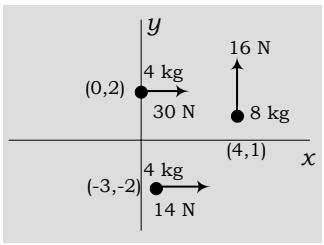


الشكل (6-12)

حركة مركز الكتلة

13-6 يقترب بروتون طاقته 1.6×10^{-13} J من بروتون آخر ساكن. ماسرعة مركز كتلتهما ؟

14-6 ماتسارع مركزكتلة النظام الموضح بالشكل (6-12) إذا خضعت الكتل إلى القوى المبينة إزاء كل واحدة؟



الشكل (6-12)

15-6 ما الزخم الخطي لكتلتين $m_2=m_1=35$ kg تتحركان بسرعتين $\mathbf{v}_1=12\mathbf{i}-\mathbf{j}$ m/s و $\mathbf{v}_2=-20\mathbf{i}+14\mathbf{j}$ m/s؟

16-6 تتجاذب كتلتان $m_1=0.1$ kg و $m_2=0.3$ kg بدءا من السكون بقوتين متساويتين ومتعاكستين قيمة الواحدة 0.01 N. (أ) ماتسارع مركز الكتلة؟ (ب) مابعد m_1 عن وضعها الابتدائي عندما تصطدم بـ m_2 إذا كانت المسافة بينهما 1 m؟

الزخم الخطي

17-6 ماذا يجب أن تكون سرعة سيارة اقتصادية كتلتها 816 kg حتى يكون لها نفس زخم سيارة فخمة كتلتها 2650 kg وسرعتها 16 km/h؟

18-6 ماتغير زخم جسم كتلته 1 kg خاضع لقوة متغيرة $\mathbf{F}=26\mathbf{i}-12t^2\mathbf{j}$ N بين اللحظتين $t_1=1$ s و$t_2=3$ s؟

19-6 تصطدم كرة كتلتها 145 g وتسير بسرعة 30 m/s على محور السينات الأفقي بحائط مائل بحيث تصنع معه زاوية 45° فترتد عنه بنفس السرعة على محور الصادات الشاقولي. ماتغير زخمها الخطي؟

20-6 تسير شاحنة كتلتها 20,000 kg شمالا بسرعة 40 km/h ثم شرقا بسرعة 50 km/h. (أ) ماتغير زخمها الخطي؟ (ب) ماتغير طاقتها الحركية؟

حفظ الزخم الخطي

21-6 يركل رجل ساكن كتلته 80 kg حجرا كتلته 0.5 kg فيتحرك الأخير بسرعة 2 m/s للأمام. كيف يتحرك الرجل؟

22-6 يطلق مدفع رشاش عشر قذائف بالثانية كتلة الواحدة 50 g وسرعتها 500 m/s باتجاه حائط كبير ثابت بحيث تتوقف القذائف فيه. (أ) مازخم وطاقة حركة كل قذيفة؟ (ب) مامتوسط القوة التي تؤثر بها القذائف على الحائط بالثانية؟

23-6 تتعرض قطعة خشب كتلتها 10 kg لوابل رصاصات كتلة الواحدة 40 g وسرعتها 1km/s. ماسرعة الخشبة بعد أن تستقر بها 15 رصاصة إذا كانت تتحرك على سطح أملس؟

24-6 يمسك رجل مدفعا رشاشا بقوة 180 N ويطلق قذائف كتلة الواحدة 50 g بسرعة 100 m/s. ما أكبر عدد من القذائف يمكنه أن يطلق بالثانية؟

25-6 تشع نواة ساكنة كتلتها 5.8×10^{-26} kg بإصدار إلكترون زخمه الخطي 1.2×10^{-22} kg.m/s ونيوترينو زخمه الخطي 6.4×10^{-23} kg.m/s بحيث يتحرك الإثنان بسرعتين متعامدتين. ما الزخم الخطي للنواة المرتدة وما طاقتها الحركية؟

26-6 يتحرك جسم كتلته 8 kg بسرعة 2 m/s على خط مستقيم دون أو تؤثر عليه أي قوة خارجية عندما ينشطر لقسمين متساويين بالكتلة ويتحركان على نفس الخط. ماسرعة كل قسم إذا اكتسبا طاقة حركية 16 J نتيجة الانشطار؟

27-6 يقف متزلجان كتلة الأول 50 kg والثاني 70 kg على ارض جليدية ملساء وعلى بعد 8 m من بعضهما. (أ) أين يقع مركز كتلتهما بالنسبة للمتزلج الأخف؟ (ب) ما المسافة الفاصلة بينهما

إذا أمسك الأثقل بحبل يمسكه الثاني وجذبه فتحرك الأخير مسافة 2.2 m؟ (ج) ما المسافة التي يقطعها الأثقل إلى أن يصطدم بزميله؟

6-28 ترتبط كتلتان متساويتان $m_1=0.5$ kg $=m_2$ ببعضهما بواسطة خيط خفيف وبكرة ملساء نصف قطرها 0.5 m، كما في آلة آتوود، بحيث تكونان ساكنتين على نفس الارتفاع. (أ) أين يقع مركز كتلتهما؟ (ب) أين يصير هذا المركز إذا نقلنا 20 g من واحدة للأخرى وكيف يتحرك؟

6-29 يتعلق رجل كتلته m بحبل مدلى من منطاد ساكن كتلته M ويبدأ بالتسلق للأعلى بسرعة v بالنسبة للمنطاد. (أ) في أي اتجاه سيتحرك المنطاد بالنسبة للأرض؟ (ب) ماذا يحدث عندما يتوقف الرجل؟

6-30 تنطلق رصاصة كتلتها 15 g بسرعة 650 m/s من بندقية ساكنة كتلتها 10 kg. ماسرعة ارتداد البندقية؟

6-31 يقفز أسد كتلته 120 kg بسرعة أفقية 12 m/s على صياد يحمل بندقية تطلق رصاصات كتلة الواحدة 15 g وسرعتها 630 m/s. كم رصاصة يجب أن يطلقها الصياد لإيقاف الأسد بفرض أن جميع رصاصاته تصيب الأخير وتستقر بجسمه؟

6-32 تصطدم سيارتان رأسيا كتلة الأولى 700 kg والثانية 1500 kg وتسيران باتجاهين متعاكسين بسرعة 65 km/h فتصبحا قطعة واحدة. ماسرعة الحطام؟

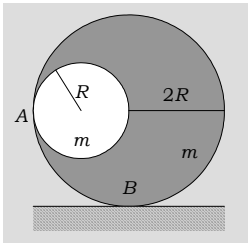
6-33 تتحرك سفينة فضاء بسرعة 4000 km/h بالنسبة للأرض عندما ينفصل عنها خزان الوقود بسرعة 80 km/h بالنسبة لقمرة القيادة بالاتجاه الخلفي. ماسرعة القمرة بعد الانفصال إذا كانت كتلتها ربع كتلة الخزان؟

6-34 يقف رجل وزنه w على عربة وزنها W تتحرك على خط أفقي بسرعة v_0 لليمين. ماتغير سرعة العربة عندما يسير الرجل لليسار بسرعة v_{rel} بالنسبة لها قبل أن يقفز عند نهايتها؟

6-35 هل تكتسب العربة المذكورة في المسألة السابقة سرعة أكبر بدءاً من السكون لو ركض عليها n شخص بنفس السرعة بشكل تتابعي أم جماعي؟

6-36 يقف طفل كتلته 20 kg عند الطرف البعيد لزورق ساكن كتلته 50 kg وطوله 5 m ويبعد 10 m عن الشاطئ. (أ) مابعد الطفل عن الشاطئ؟ (ب) ماذا يصير هذا البعد إذا سار الطفل 2 m على الزورق باتجاه الشاطئ؟ (أهمل الاحتكاك).

6-37 يقف رجل كتلته 80 kg عند مؤخرة زورق جليدي كتلته 400 kg وطوله 18 m يتحرك بسرعة 4 m/s عبر منطقة جليدية ملساء. كيف يتحرك الزورق إذا سار الرجل لمقدمته بسرعة 2 m/s بالنسبة له؟



الشكل(6-13)

38-6 يجلس الطالب ذكي على بعد 3 m من الطالب ناجح في زورق ساكن كتلته 30 kg على سطح بحيرة ساكنة بحيث يقع مركز كتلة الزورق بينهما. وعندما يتبادلا مكانيهما يلاحظ ذكي أن الزورق تحرك 0.4 m بالنسبة للشاطئ فاستطاع معرفة كتلة زميله ناجح. ماكتلة الأخير إذا كانت كتلة ذكي 80 kg؟ **39-6** تطلق قذيفة بسرعة 500 m/s من سطح الأرض صانعة زاوية °60 مع الأفق. وبعد 50 s من إطلاقها تنشطر لجزئين متساويين أحدهما ساكن بعد الانشطار مباشرة ليسقط للأسفل. مابعد مكان سقوط الجزء الثاني عن نقطة الإطلاق؟

40-6 تتدحرج كرة كتلتها m ونصف قطرها R داخل كرة كبيرة مجوفة لها نفس الكتلة ونصف قطرها $2R$ موضوعة على سطح افقي أملس بدءا من النقطة A، كما في الشكل (6-13)، لتستقر عند B. ما المسافة التي يتحركها مركز كتلة الكرة الكبيرة وفي أي اتجاه.

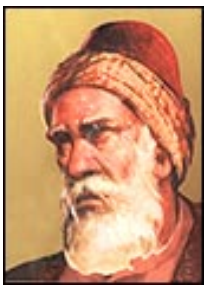
حركة الصواريخ والكتلة المتغيرة

41-6 تطلق مركبة فضائية كتلتها 6000 kg للأعلى. (أ) ماكتلة الوقود الخارج منها بالثانية إذا كان ينطلق منها بسرعة 1000 m/s بالنسبة لها حتى يتغلب نفثها على وزنها؟ (ب) كم تصير هذه الكتلة إذا أردنا إعطاء المركبة تسارعا رأسيا 20 m/s^2؟ لاحظ أن للجاذبية دور مهم في هذه المسألة.

42-6 تشغل محركات مركبة فضائية كتلتها مع وقودها 2.6×10^5 kg ساكنة في الفضاء فيخرج منها الوقود بمعدل 480 kg/s بسرعة 3.3 km/s بالنسبة للمركبة لمدة 20 s. مانفث المحركات وما السرعة النهائية التي تصل إليها المركبة؟

43-6 تطير طائرة بسرعة 180 m/s بينما يخرج منها الوقود بسرعة 490 m/s بالنسبة لها. مانفث المحركات إذا كان معدل استهلاك الوقود هو 3 kg/s؟

من علماء الإسلام


الفارابي

محمد بن محمد بن طرخان بن أوزلغ، أبو نصر **الفارابي** (339-257هـ/950-870م). من أكبر فلاسفة المسلمين درس الفلسفة والمنطق والطب العلوم اللسانية العربية والموسيقي وكانت له إسهامات مهمة في علوم أخرى كالرياضيات والطب والفيزياء. فقد برهن في الفيزياء على وجود الفراغ. وتتجلى أهم إسهاماته العلمية في كتابه "إحصاء العلوم" الذي وضع فيه المبادئ الأساس للعلوم وتصنيفها وبرز في الموسيقى. وكان أول من طرح فكرة اللوغارتم لتقدير شدة الصوت واختلاف الأصوات عن بعضها.